

# PhD Thesis of Paris 6 University

*Specialty*

Theoretical Physics

*Presented by*

**Ronan Thomas RISLER**

*To get the title of* “DOCTEUR de l’UNIVERSITE PARIS 6”

Thesis subject :

## **Critical behavior of coupled oscillators**

**Renormalization group and universality class**

Defended on September 22<sup>nd</sup>, 2003 in Paris  
in front of the following committee :

Messrs	Edouard BRÉZIN	Chairman
	Bertrand DELAMOTTE	Examiner
	Bertrand DUPLANTIER	Reporter
	Erwin FREY	Reporter
	Frank JÜLICHER	Supervisor
	Jacques PROST	Supervisor









# Thèse de doctorat de l'université Paris 6

*Spécialité*

Physique Théorique

*Présentée par*

**Ronan Thomas RISLER**

*Pour obtenir le grade de* DOCTEUR de l'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse :

## Comportement critique d'oscillateurs couplés

Groupe de renormalisation et classe d'universalité

Soutenue le 22 Septembre 2003 devant le jury composé de :

Messieurs	Edouard BRÉZIN	Président
	Bertrand DELAMOTTE	Examineur
	Bertrand DUPLANTIER	Rapporteur
	Erwin FREY	Rapporteur
	Frank JÜLICHER	Directeur de thèse
	Jacques PROST	Directeur de thèse



*à ma famille.*



## Remerciements

Le travail présenté ici a été réalisé pour une part au laboratoire Physico-Chimie Curie à l'Institut Curie à Paris, et pour une autre part à l'Institut Max Planck de Dresde en Allemagne, sous la direction de Frank Jülicher et de Jacques Prost. J'ai beaucoup appris d'eux, de leurs connaissances et rigueur de théoriciens et de leur intuition des systèmes biologiques et des systèmes physiques en général. Je tiens à témoigner ici de toute ma gratitude envers eux. Sans eux, ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie Jacques Prost de m'avoir accueilli dans son laboratoire, de m'avoir ouvert sur le monde fascinant de la biophysique, et d'avoir inspiré et guidé le présent sujet de thèse. Je remercie Frank Jülicher qui m'a encadré tout au long de ce travail. Son expérience, ses connaissances et ce qu'il m'a appris ont été tout à fait déterminants. Je remercie avec émotion Dominique Vautherin qui a encadré mes débuts en recherche et dont le décès en a tragiquement interrompu le cours.

Je tiens à remercier Karsten Kruse pour les nombreuses discussions scientifiques que nous avons eu l'occasion d'avoir ensemble, et pour avoir été cet ami de confiance qui vous apporte son soutien ; Björn Nadrowski sans lequel, entre autres, le déménagement à Dresde et la réalisation des diagrammes de Feynman de ce mémoire auraient été de véritables cauchemars ; Pascal Martin pour avoir consacré de son temps à me présenter ses expériences fascinantes sur les touffes ciliaires de cellules auditives.

Au cours de discussions et d'échanges fructueux pour mon travail, j'ai pu profiter des compétences scientifiques de Markus Bär, Edouard Brézin, Erwin Frey et Olivier Giraud.

J'ai pu apprécier l'aide, les compétences, la gentillesse et la sympathie de Nadine Baldes, Olivier Giraud, Mai Dinh, Françoise Annotiau, Janaki Balakrishnan, Denis Bartolo, Nicole Blandeau, Tobias Bollenbach, Sébastien Camalet, Amit Chattopadhyay, Philippe Girard, Andreas Hilfinger, Gernot Klein, Ken Sekimoto, Alexander Zumdieck et tant d'autres de l'Institut Curie et de l'Institut Max Planck.

Je tiens à remercier Edouard Brézin et Bertrand Delamotte de participer à mon jury de thèse, Erwin Frey d'avoir accepté d'être rapporteur de mon travail malgré le caractère abstrait de ce manuscrit qui est rédigé dans une langue qui lui est étrangère, ainsi que Bertrand Duplantier d'avoir accepté la même mission malgré la date tardive à laquelle j'ai été contraint de lui adresser ma demande.

J'ai une pensée émue pour Aude Dattoli qui a tant représenté pour moi pendant ces années de doctorat.

Je remercie enfin ma famille qui m'a suivi, soutenu et conseillé tout au long de mes études, et à laquelle je dédie ce travail.



# Comportement critique d'oscillateurs couplés

*Groupe de renormalisation et classe d'universalité*

Ronan Thomas RISLER

## Résumé

Les étonnantes performances de l'organe auditif des mammifères sont notamment dues aux propriétés génériques des oscillateurs critiques couplés qui constituent le système. Cette thèse présente une étude des propriétés critiques génériques des systèmes spatialement étendus d'oscillateurs stochastiques couplés, opérant dans le voisinage d'une instabilité oscillante homogène ou bifurcation de Hopf. Dans ce contexte, cette bifurcation constitue un point critique dynamique hors équilibre, exhibant des propriétés universelles qui sont canonicquement décrites par l'équation Ginzburg-Landau complexe en présence de bruit. La formulation du problème en termes d'une théorie statistique dynamique des champs non hamiltonienne nous permet d'étudier le comportement critique du système à l'aide des techniques de la renormalisation dynamique perturbative.

Dans un cas particulier, une analogie exacte avec le modèle  $O(2)$  dynamique nous permet d'écrire une relation généralisée de la relation fluctuation-dissipation et de déduire le comportement critique du système directement à partir des études antérieures. Dans le cas général, nous établissons la structure du groupe de renormalisation de la théorie dans un espace de dimension  $4-\varepsilon$ , en lui adaptant les schémas de renormalisation de Wilson et de Callan-Symanzik. La présence d'une fréquence caractéristique dans le système - la fréquence des oscillations spontanées à la transition - impose d'associer aux transformations de renormalisation un changement de référentiel oscillant dépendant de l'échelle. Nous effectuons le calcul à l'ordre de deux boucles en théorie des perturbations, et montrons que la classe d'universalité du modèle est décrite par le point fixe du modèle dynamique dissipatif  $O(2)$  dans un référentiel oscillant bien choisi. Ainsi, bien que la dynamique soit hautement hors équilibre et brise les relations de bilan détaillé, une relation fluctuation-dissipation généralisée est asymptotiquement restaurée à la transition. Cette relation prévoit l'existence de fortes contraintes sur les principales observables expérimentales : la fonction de corrélation à deux points et la fonction de réponse linéaire à un stimulus sinusoïdal.

**Mots-clés** : Physique statistique hors équilibre, point critique hors équilibre, groupe de renormalisation dynamique, équation Ginzburg-Landau complexe, bifurcation de Hopf, oscillateurs couplés, dynamique critique, biophysique, systèmes actifs, diagrammes de Feynman.





# Critical behavior of coupled oscillators

*Renormalization group and universality class*

Ronan Thomas RISLER

## Abstract

The astonishing efficiency of the auditory organ of mammals is particularly due to the generic properties of the coupled critical oscillators which make up the system. This thesis presents a study of the generic critical properties of spatially extended systems of coupled stochastic oscillators, operating in the proximity of a uniform oscillatory instability or Hopf bifurcation. In this context, this bifurcation constitutes an out of equilibrium critical point with universal features, which are canonically described by the complex Ginzburg-Landau equation in the presence of noise. The formulation of the problem in terms of a non-Hamiltonian dynamical statistical field theory allows us to study the critical behavior of the system by using perturbative renormalization group techniques.

In a particular case, an exact analogy with the  $O(2)$  dynamical model allows us to write a generalized fluctuation-dissipation relation and to deduce the critical behavior directly from previous studies. In the general case, we establish the structure of the renormalization group of the theory in a  $4 - \varepsilon$  dimensional space, using adapted Wilson and Callan-Symanzik schemes. The presence of a characteristic frequency in the system - the frequency of the spontaneous oscillations at the transition - imposes to perform a scale-dependant frame transformation during the renormalization procedure. We perform two-loop order calculations in perturbation theory, and show that the universality class of the model is described, in a suited oscillating frame, by the fixed point of the dissipative  $O(2)$  dynamics. Then, while the dynamics is highly out of equilibrium and breaks the detailed-balance relations, a generalized fluctuation-dissipation relation is asymptotically recovered at the transition. This relation imposes strong constraints on the main experimental observables : the two-point correlation function and the linear response function to an external sinusoidal stimulus.

**Key-words** : Out of equilibrium statistical physics, out of equilibrium critical point, dynamic renormalization group, complex Ginzburg-Landau equation, Hopf bifurcation, coupled oscillators, critical dynamics, biophysics, active systems, Feynman diagrams.



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Thèse originale</b>	<b>1</b>
	<b>Avant-Propos</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Systèmes stochastiques hors équilibre et comportements critiques</b>	<b>5</b>
1.1	Systèmes biologiques stochastiques actifs . . . . .	6
1.2	Instabilités dynamiques et comportements universels hors équilibre	13
1.2.1	Bifurcations et instabilités dynamiques . . . . .	14
1.2.2	Comportements critiques hors équilibre et groupe de re-normalisation . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Théorie des champs d'oscillateurs couplés</b>	<b>25</b>
2.1	Quantités physiques et dynamique générique . . . . .	26
2.1.1	Equation dynamique générique . . . . .	26
2.1.2	Corrélateurs du bruit . . . . .	26
2.2	Fonctions de corrélation et de réponse . . . . .	27
2.3	Formalisme de théorie des champs . . . . .	28
2.3.1	Formulation matricielle et fonctions à deux points . . . . .	28
2.3.2	Fonctionnelle génératrice . . . . .	29
2.3.3	Action effective . . . . .	32
2.4	Elimination de la fréquence $\omega_0$ . . . . .	34
2.4.1	Référentiel oscillant . . . . .	34
2.4.2	Analogie exacte avec un problème thermodynamique . . . . .	35
2.4.3	Théorème Fluctuation-Dissipation généralisé . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Théorie champ moyen d'oscillateurs couplés dans le régime critique</b>	<b>39</b>
3.1	Approximation de Landau . . . . .	39
3.1.1	Point selle de la théorie . . . . .	40
3.1.2	Approximation à l'ordre des arbres . . . . .	40
3.1.3	Deuxième point de vue . . . . .	41
3.2	Fonctions de corrélation et de réponse . . . . .	42
3.3	Bifurcation de Hopf . . . . .	43
3.3.1	Instabilité oscillante homogène . . . . .	43
3.3.2	Comportements asymptotiques et exposants critiques . . . . .	43
3.4	Validité de l'approximation de Landau et dimensions critiques . . . . .	45

<b>4</b>	<b>Groupe de renormalisation des oscillateurs couplés</b>	<b>49</b>
4.1	Schéma de renormalisation de Wilson . . . . .	49
4.1.1	Equations de groupe de renormalisation . . . . .	50
4.1.2	Paramètres renormalisés et cohérence de la théorie . . . . .	53
4.1.3	Comportement critique en dimension supérieure à 4 . . . . .	55
4.2	Renormalisation des oscillateurs couplés dans le schéma de Wilson	56
4.2.1	Dimensions canoniques . . . . .	56
4.2.2	Symétries . . . . .	56
4.2.3	Renormalisation de la phase . . . . .	58
4.2.4	Equations de groupe de renormalisation . . . . .	59
4.2.5	Point fixe d'une transition non-oscillante . . . . .	63
4.3	Renormalisation d'une théorie oscillante . . . . .	64
4.3.1	Elimination du paramètre $\omega_0$ . . . . .	64
4.3.2	Equations de groupe de renormalisation . . . . .	65
4.3.3	Comportements asymptotiques critiques . . . . .	69
4.3.4	Identification des exposants critiques en champ moyen et comportement critique en dimension plus grande que 4 . . . . .	71
4.3.5	Une nouvelle renormalisation du modèle $O(2)$ . . . . .	72
4.4	Schéma de renormalisation de Callan-Symanzik . . . . .	74
4.5	Renormalisation des oscillateurs couplés dans le schéma de Callan- Symanzik . . . . .	75
4.5.1	Théorie nue . . . . .	76
4.5.2	Elimination du paramètre $\omega_0$ . . . . .	76
4.5.3	Diagrammes superficiellement divergents . . . . .	77
4.5.4	Théorie renormalisée et contre-termes . . . . .	78
4.5.5	Equations de Callan-Symanzik . . . . .	80
4.5.6	Solution des équations de Callan-Symanzik . . . . .	83
4.5.7	Point fixe et exposants critiques . . . . .	85
4.5.8	Structure de groupe en gardant $\omega_0$ . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Calcul perturbatif à l'ordre d'une boucle</b>	<b>89</b>
5.1	Renormalisation infinitésimale des paramètres à l'ordre d'une boucle	89
5.1.1	Renormalisation du propagateur . . . . .	90
5.1.2	Renormalisation du vertex . . . . .	91
5.2	Equations de groupe de renormalisation et structure des points fixes de la théorie . . . . .	96
5.2.1	Equations de groupe de renormalisation . . . . .	96
5.2.2	Points fixes et linéarisation . . . . .	98
5.2.3	Diagramme de Flot et exposants critiques . . . . .	99
5.2.4	Résultats obtenus en conservant $\omega_0$ et cohérence de la théorie	101
5.2.5	Insuffisance des résultats et nécessité des calculs à l'ordre de deux boucles . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Calcul perturbatif à l'ordre de deux boucles</b>	<b>105</b>
6.1	Théorie des perturbations et représentations diagrammatiques . . . . .	106
6.1.1	Conventions graphiques . . . . .	106
6.1.2	Expression diagrammatique des vertex propres . . . . .	107

6.2	Calcul des facteurs $Z$ . . . . .	110
6.2.1	Renormalisation du vertex . . . . .	110
6.2.2	Renormalisation de la masse et de la fréquence . . . . .	113
6.2.3	Renormalisation du propagateur . . . . .	114
6.2.4	Intégrales et calcul formel . . . . .	117
6.2.5	Expression des facteurs $Z$ . . . . .	118
<b>7</b>	<b>Comportement critique d'oscillateurs couplés en présence de bruit</b>	<b>121</b>
7.1	Expression et solution des équations de groupe de renormalisation	121
7.1.1	Référentiel oscillant . . . . .	121
7.1.2	Théorie physique . . . . .	122
7.2	Diagramme de flot, points fixes et classe d'universalité . . . . .	125
7.2.1	Diagramme de flot . . . . .	125
7.2.2	Classe d'universalité et exposants critiques . . . . .	125
7.2.3	Phase et pulsation effectives et quantités universelles . . . . .	127
7.2.4	Limite singulière en dimension 4 et synchronisation . . . . .	127
7.2.5	Synchronisation . . . . .	127
7.3	Fonctions de corrélation et de réponse dans le régime critique . . . . .	128
7.3.1	Référentiel oscillant . . . . .	130
7.3.2	Solution $c_a(s)$ . . . . .	131
7.3.3	Phase et pulsation effectives . . . . .	132
7.4	Brisure et restauration asymptotique de la relation Fluctuation-Dissipation généralisée . . . . .	134
7.5	Corrections aux lois d'échelle . . . . .	136
	<b>Discussion</b>	<b>139</b>
<b>II</b>	<b>English summary of the thesis</b>	<b>145</b>
<b>1</b>	<b>Out of equilibrium stochastic systems and critical behaviors</b>	<b>151</b>
1.1	Stochastic active biological systems . . . . .	151
1.2	Dynamic instabilities and out of equilibrium universal behaviors . . . . .	153
1.2.1	Bifurcations and dynamic instabilities . . . . .	153
1.2.2	Out of equilibrium critical behaviors and renormalization group . . . . .	155
<b>2</b>	<b>Field theory of coupled oscillators</b>	<b>157</b>
2.1	Physical quantities and general dynamics . . . . .	157
2.1.1	Generic dynamic equation . . . . .	157
2.1.2	Noise correlator . . . . .	157
2.2	Correlation and response functions . . . . .	158
2.3	Field theoretical formalism . . . . .	158
2.3.1	Matricial formalism and two-point functions . . . . .	158
2.3.2	Functional generator . . . . .	158
2.3.3	Effective action . . . . .	159

2.4	Eliminating $\omega_0$ . . . . .	159
2.4.1	Oscillatory frame . . . . .	159
2.4.2	Exact analogy with a thermodynamic problem . . . . .	159
2.4.3	General fluctuation-dissipation theorem . . . . .	160
<b>3</b>	<b>Mean field theory of coupled oscillators in the critical regime</b>	<b>161</b>
3.1	Landau approximation . . . . .	161
3.1.1	Saddle-point of the theory . . . . .	161
3.1.2	Tree-level approximation . . . . .	161
3.1.3	Second point of view . . . . .	162
3.2	Mean field correlation and response functions . . . . .	162
3.3	Hopf bifurcation . . . . .	162
3.3.1	Homogeneous oscillatory instability . . . . .	162
3.3.2	Mean field asymptotic behaviors and critical exponents . .	163
3.4	Mean field approximation validity and critical dimensions . . . .	163
<b>4</b>	<b>Renormalization group for coupled oscillators</b>	<b>165</b>
4.1	Wilson's renormalization scheme . . . . .	166
4.1.1	Renormalization group equations . . . . .	166
4.1.2	Renormalized parameters and self-consistence of the theory	167
4.1.3	Critical behavior in space dimensions larger than 4 . . . .	167
4.2	Renormalization of coupled oscillators in Wilson's scheme . . . .	168
4.2.1	Canonical dimensions . . . . .	168
4.2.2	Symmetries . . . . .	168
4.2.3	Phase renormalization . . . . .	168
4.2.4	Renormalization group equations . . . . .	169
4.3	Renormalization of an oscillatory theory . . . . .	170
4.3.1	Elimination of the parameter $\omega_0$ . . . . .	170
4.3.2	Renormalization group equations . . . . .	170
4.3.3	Critical asymptotic behaviors . . . . .	171
4.3.4	Mean field critical exponents and critical behavior in $d > 4$	172
4.3.5	A new renormalization of the $O(2)$ model . . . . .	172
4.4	Callan-Symanzik renormalization scheme . . . . .	173
4.5	Renormalization of the theory of coupled oscillators in the Callan-Symanzik's scheme . . . . .	173
4.5.1	Bare theory . . . . .	173
4.5.2	Elimination of the parameter $\omega_0$ . . . . .	174
4.5.3	Superficial degree of divergence . . . . .	174
4.5.4	Renormalized theory and counterterms . . . . .	174
4.5.5	Callan-Symanzik equations . . . . .	174
4.5.6	Solution of the Callan-Symanzik equations . . . . .	175
4.5.7	Fixed points and critical exponents . . . . .	175
4.5.8	Renormalization group structure when we keep $\omega_0$ in the set of renormalized parameters . . . . .	176

<b>5</b>	<b>One-loop order perturbative calculations</b>	<b>177</b>
5.1	Infinitesimal renormalization of the parameters to the one-loop order . . . . .	177
5.1.1	Propagator renormalization . . . . .	177
5.1.2	Vertex renormalization . . . . .	178
5.2	Renormalization group equations and fixed points structure of the theory . . . . .	178
5.2.1	Renormalization group equations . . . . .	178
5.2.2	Fixed points and linearization . . . . .	178
5.2.3	Flow diagram and critical exponents . . . . .	179
5.2.4	Results obtained when we keep $\omega_0$ . . . . .	179
5.2.5	Insufficiency of the results and necessity of two-loop order calculations . . . . .	179
<b>6</b>	<b>Two-loop order perturbative calculations</b>	<b>181</b>
6.1	Perturbation theory and diagrammatic representation . . . . .	181
6.1.1	Graphical conventions . . . . .	181
6.1.2	Diagrammatic expressions of the eigen vertexes . . . . .	181
6.2	$Z$ -factor calculation . . . . .	182
6.2.1	Vertex renormalization . . . . .	182
6.2.2	Renormalization of the mass and the frequency . . . . .	182
6.2.3	Propagator renormalization . . . . .	183
6.2.4	Formal calculations and complex integrals . . . . .	183
6.2.5	$Z$ -factors expressions . . . . .	183
<b>7</b>	<b>Results</b>	<b>185</b>
7.1	Expression and solution of the renormalization group equations . . . . .	185
7.1.1	Oscillating frame . . . . .	185
7.1.2	Physical theory . . . . .	185
7.2	Flow diagram, fixed point and universality class . . . . .	186
7.2.1	Flow diagram . . . . .	186
7.2.2	Universality class and critical exponents . . . . .	187
7.2.3	Peculiar limit in 4 dimensions and synchronization . . . . .	187
7.3	Response and correlation functions in the critical regime . . . . .	188
7.3.1	Oscillatory frame . . . . .	188
7.3.2	Solution $c_a(s)$ . . . . .	189
7.3.3	Effective phase and frequency . . . . .	189
7.4	Creation and breaking of the generalized fluctuation-dissipation relation . . . . .	190
7.5	Corrections to scaling laws . . . . .	191
	<b>Conclusion ; Outlook</b>	<b>193</b>
<b>III</b>	<b>Annexes et bibliographie</b>	<b>197</b>
<b>A</b>	<b>Notations</b>	<b>199</b>

TABLE DES MATIÈRES

---

<b>B</b>	<b>Corrélateur du bruit statistique près d'un point critique</b>	<b>203</b>
<b>C</b>	<b>Théorie des perturbations et représentation graphique</b>	<b>205</b>
<b>D</b>	<b>Jacobien, <math>\theta(0)</math> et causalité</b>	<b>209</b>
<b>E</b>	<b>Expressions complètes de diverses quantités</b>	<b>215</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>219</b>







Première partie  
Thèse originale



# Avant-Propos

Une des grandes préoccupations des sciences physiques, et donc l'un de ses grands défis, est la recherche de l'universalité dans les comportements naturels. Cette recherche consiste à tenter d'expliquer dans un même cadre théorique le maximum d'événements physiques, avec le minimum d'hypothèses possibles sur les conditions de leur réalisation. Nous disons que nous connaissons une *loi* de la physique lorsque nous sommes en possession d'un cadre explicatif du comportement d'un grand nombre de systèmes (soumis à des hypothèses générales) et capable de prédictions. Un des exemples les plus célèbres issus de l'histoire de la physique qui illustrent le succès de la discipline dans cette recherche, et certainement l'un des exemples les plus importants historiquement, est la loi de l'attraction universelle des corps massifs formulée en 1687 par Isaac Newton dans son oeuvre maîtresse : *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Avant lui, l'"explication" de la chute des corps n'était que descriptive : la philosophie d'Aristote prônait que les corps graves chutaient parce que leur *lieu naturel* était d'être "en bas". Le lieu naturel du feu, lui, se trouvait "en haut". Le comportement des systèmes physiques était lié à leur *nature*. Avec Newton, nous formulons un cadre *universel* descriptif du comportement des systèmes, expliquant des événements aussi différents que la chute d'une pomme ou le mouvement de la lune. La chute des corps ne dépend plus que d'une propriété quantitative, leur masse grave, qui est qualitativement universelle, et dont la connaissance permet des *prédictions* sur leur mouvement, indépendamment de leur nature (composition chimique, couleur, etc...). Sous certaines hypothèses communes, consistant par exemple à pouvoir négliger les frottements de l'air, tous les corps physiques ont le même comportement qualitatif, quantitativement paramétré par leur masse grave. Nous disons que nous sommes en possession d'une loi physique.

Le sujet de cette thèse concerne l'universalité. Nous considérons les systèmes d'oscillateurs couplés dans la limite thermodynamique et situés au voisinage d'une transition de phase oscillante et homogène ou bifurcation de Hopf. Nous nous plaçons du côté non oscillant de la bifurcation. Sous ces hypothèses génériques, nous nous proposons de dégager les propriétés universelles et non-universelles du comportement de ces systèmes. Le cadre théorique et technique de notre étude est le groupe de renormalisation dynamique perturbatif. A l'approche de la transition de phase, nous montrons que certaines quantités physiques relatives à ces systèmes, les fonctions de corrélation et de réponse à une force externe, ont des comportements asymptotiques universels exprimés en termes de lois d'échelle, et quantifiés par des exposants critiques. Notre étude a pour but, entre autres, de déterminer ces exposants.

Le chapitre 1 est un chapitre introductif. Nous commençons par motiver notre étude, en exposant le comportement de certains systèmes biologiques actifs. Nous présentons ensuite les techniques de physique théorique que nous utiliserons dans les chapitres suivants, et qui se sont avérées fructueuses par le passé dans d'autres contextes. Enfin nous définissons le cadre de notre étude, qui concerne une transition de phase dynamique située loin de l'équilibre thermique. Le chapitre 2 présente le formalisme théorique général utile à notre étude, et utilise la connaissance des théories dynamiques critiques habituelles pour établir la présence d'une transition dynamique dans le système. Le chapitre 3 présente la théorie champ moyen de notre système, qui est un cadre théorique approximatif, et qui s'avère donner des prédictions correctes en dimension d'espace supérieure à 4. Le chapitre 4 constitue le coeur de notre étude. Nous y présentons la structure de la théorie du groupe de renormalisation pour notre théorie dynamique critique hors équilibre. Celle-ci sera d'abord décrite dans le cadre du schéma de renormalisation de Wilson. Ce schéma, qui est à la fois intuitif, historiquement essentiel et naturel pour l'étude au premier ordre en théorie des perturbations, s'avère techniquement inextricable dès lors que nous devons effectuer des calculs perturbatifs aux ordres élevés. Nous présentons donc ensuite la structure du groupe de renormalisation de notre théorie dans le cadre du schéma de renormalisation de Callan-Symanzik. Le chapitre 5 expose en détails les calculs à l'ordre d'une boucle effectués dans le cadre du schéma de renormalisation de Wilson, et les résultats qui en sont déduits à cet ordre en théorie des perturbations pour la structure de la théorie. Nous montrons que ce calcul est insuffisant pour avoir la structure qualitative complète du groupe de renormalisation de la théorie, ainsi que les premières corrections non triviales aux exposants critiques. Nous présentons dans le chapitre 6 les calculs à l'ordre de deux boucles dans le cadre de la technique de Callan-Symanzik, et déterminons les exposants critiques à cet ordre. Le chapitre 7 tire les conclusions physiques générales de notre étude, et étudie les comportements universels et non universels de notre système. Enfin l'annexe A précise certaines notations et définitions utilisées tout au long de ce mémoire, l'annexe B précise et justifie les corrélateurs du bruit statistique que nous utilisons pour traduire la présence de fluctuations, l'annexe C précise les règles de Feynman de la théorie relatives à la représentation graphique des termes des séries perturbatives des quantités que nous calculons, l'annexe D dérive en détails le formalisme de théorie des champs à partir de l'équation dynamique que l'on considère, et l'annexe E donne les expressions complètes de certaines quantités intervenant dans le résultat du calcul.

# Chapitre 1

## Systemes stochastiques hors équilibre et comportements critiques

La caractérisation des propriétés des systèmes hors équilibre constitue actuellement l'un des axes de recherche majeurs en physique statistique. Loin de l'équilibre thermique, les propriétés des systèmes ne peuvent pas être génériquement déduites de l'écriture d'une énergie libre effective, et une description détaillée de la dynamique de ces systèmes est nécessaire. Cependant, près des transitions de phases continues, qui séparent différents états stationnaires hors équilibre, certaines propriétés de ces systèmes sont universelles et peuvent être étudiées dans un cadre théorique général. La notion d'universalité, qui concerne les propriétés de grandes échelles temporelles et spatiales d'un système donné, a longtemps été réservée aux systèmes situés au voisinage des transitions de phase du second ordre proches de l'équilibre thermique. Les propriétés universelles de tels systèmes ont été étudiées via différentes approches, incluant des solutions exactes de modèles idéalisés (voir entre autres l'exemple historique [110]) et des études numériques en grand nombre, guidées par les données expérimentales (voir les références dans [150]). Mais ce n'est qu'avec la théorie du groupe de renormalisation, initialement développée dans le cadre de la théorie quantique des champs, qu'un cadre théorique explicatif générique a été développé [83, 141, 142]. Grâce à cette technique, l'hypothèse de l'existence de lois asymptotiques dynamiques [37, 54] a pu être théoriquement vérifiée et quantifiée. Ce cadre théorique permet de regrouper les systèmes en classes d'universalité, selon des critères génériques qui concernent le nombre de composantes, les propriétés de symétrie et les lois de conservation des grandeurs physiques pertinentes à la transition [61]. Au sein d'une même classe d'universalité, les comportements asymptotiques des systèmes sont identiques à la transition [150, 129]. Par analogie avec ces études au voisinage de l'équilibre thermique, les techniques de groupe de renormalisation fournissent un cadre théorique à l'identification et l'étude des classes d'universalité des comportements asymptotiques des systèmes au voisinage des instabilités dynamiques continues ou transitions de phase dynamiques du second ordre hors équilibre.

L'étude des systèmes biologiques, intrinsèquement actifs, fournit des exemples de telles transitions. Dans ce chapitre, nous commençons par présenter des systèmes biologiques pour lesquels la présence de fluctuations joue un rôle important. Dès lors, l'étude théorique de ces systèmes nécessite le formalisme de la physique statistique hors équilibre. Les mécanismes responsables des propriétés dynamiques de chacun de ces systèmes sont hautement spécifiques. Cependant, au voisinage des instabilités, des propriétés génériques peuvent être dégagées. Dans une première section, nous donnons l'exemple de systèmes biologiques présentant des instabilités dynamiques oscillantes, et dont l'étude expérimentale permet de mettre en valeur la présence de propriétés génériques. Dans une seconde section, nous présentons brièvement le formalisme théorique adapté à l'étude des comportements génériques des systèmes placés au voisinage des instabilités dynamiques. Nous portons notre attention sur la différence de point de vue qui existe entre le formalisme et le langage issus de l'étude des systèmes dynamiques et leurs homologues issus de l'étude des transitions de phase. Nous insistons enfin sur ce second point de vue qui sera le nôtre en présentant brièvement les exemples historiques de telles études.

## **1.1 Systèmes biologiques stochastiques actifs**

La complexité et la variabilité des systèmes biologiques est étonnante [1]. Très souvent, la dynamique de ces systèmes repose sur des mécanismes très spécifiques et possiblement très compliqués. Une des caractéristiques essentielles de ces systèmes, et qui en fait un champ d'investigation non standard pour les physiciens, est le fait qu'ils présentent très souvent des comportements basés sur des mécanismes actifs. Un des exemples les plus frappant de tels phénomènes est la capacité des êtres vivants à exercer des forces ou générer du mouvement. En plus de la contraction musculaire, qui en est l'illustration macroscopique et quotidienne la plus évidente, cette propriété est représentée au niveau cellulaire par de multiples phénomènes extrêmement variés. Parmi ceux-ci, citons la motilité cellulaire, la division cellulaire et le transport d'organelles ou de composés à l'intérieur d'une même cellule [7].

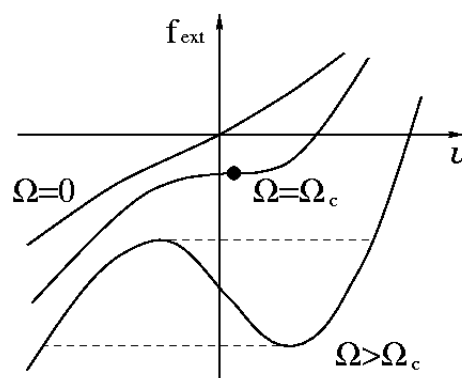
### **Protéines motrices et structures cellulaires actives**

De tels mouvements sont générés au niveau moléculaire par des protéines, appelées protéines motrices [65]. Ces macromolécules hydrolysent l'adénosine triphosphate (ATP) en adénosine diphosphate (ADP), et récupèrent l'énergie libérée au cours de cette réaction chimique pour se déplacer dans le milieu visqueux que constitue le cytoplasme (milieu intra-cellulaire) ou exercer des forces sur les filaments du cytosquelette des cellules auxquelles elles appartiennent. Il existe un grand nombre de protéines motrices, regroupées en familles par proximité génétique. Citons trois grands embranchements de cette classification : les dynéines, présentes dans l'axonème, structure responsable de la nage de nombreux micro-organismes (comme par exemple les spermatozoïdes), les kinésines, qui transportent les neurotransmetteurs le long des neurones, et les



myosines, responsables de la contraction musculaire [90, 71]. Le véritable complexe qui détermine l'unité motrice dans la cellule est constitué de la protéine et de son filament associé qui constitue, dans les exemples précédemment cités, une structure linéaire et polaire. Aussi ces protéines font elles partie de la classe des moteurs moléculaires dits "linéaires" [7].

Les méthodes expérimentales permettent de mesurer les forces et les vitesses de moteurs individuels, ou de petits groupes de moteurs [72, 123, 126, 70]. La réaction d'hydrolyse de l'ATP présente plusieurs étapes, au cours desquelles la conformation de la protéine change [124, 64]. Cette observation a été à la base de l'élaboration d'un modèle du principe de fonctionnement général des protéines motrices linéaires [116, 20, 4], qui s'inspire des modèles de "ratchets" [94]. Il suppose l'existence de deux états d'interaction différents du moteur avec le filament, et décrit l'évolution dynamique de la position d'un point donné du moteur dans un régime de forte friction, et en présence d'une force brownienne qui rend la dynamique stochastique. Dans la limite d'un grand nombre de moteurs reliés entre eux et distribués de façon homogène le long du filament porteur, ce qui est par exemple le cas de la structure des complexes "dynéines+microtubule" et "actomyosine", la dynamique collective des moteurs devient déterministe. On peut alors dériver du modèle précédent des relations entre la force externe  $f_{\text{ext}}$  appliquée aux moteurs et la vitesse relative  $v$  de ces derniers avec le filament porteur [79]. En fonction de la valeur d'un paramètre du modèle noté  $\Omega$ , lié physiquement au taux d'hydrolyse de l'ATP par les moteurs, la courbe  $f_{\text{ext}}(v)$  peut être monotone ou non. Dans le second cas, plusieurs solutions pour la vitesse sont alors possibles à force fixée ; la vitesse présente des instabilités et discontinuités en tant que fonction de la force  $f_{\text{ext}}$  (voir la figure 1.1). La courbe de



**FIG. 1.1:** Courbes  $f_{\text{ext}}(v)$  obtenues pour différentes valeurs du paramètre  $\Omega$  d'un modèle de moteurs moléculaires opérant collectivement.  $\Omega$  est lié au taux d'hydrolyse de l'ATP par les moteurs. Le système présente une instabilité dynamique pour une valeur  $\Omega_c$  du paramètre  $\Omega$  [78].

coexistence déduite de ce modèle a notamment été mise en évidence expérimentalement [118]. Si l'on relie le filament de moteurs au filament porteur par un élément élastique, une solution statique du système devient instable pour une

certaine valeur critique  $\Omega_c$  du paramètre  $\Omega$ . Au delà de cette valeur, le système présente des oscillations, dites spontanées, qui sont le résultat du comportement collectif auto-organisé des moteurs [80, 78]. Les moteurs collectifs présentent une instabilité dynamique oscillante, aussi appelée *bifurcation de Hopf* (voir le paragraphe 1.2.1). Au voisinage du point de bifurcation, la dynamique, par ailleurs spécifique de ces systèmes de moteurs collectifs, présente des comportements génériques.

La structure des muscles correspond à celle modélisée ci-dessus : des filaments de myosines interagissent avec des filaments d'actine, et les deux types de filaments sont par ailleurs connectés par des éléments élastiques [71, 72]. Expérimentalement, on observe que certains insectes battent des ailes de manière désynchronisée par rapport au signal nerveux [114]. D'autre part, on observe *in vitro* des oscillations spontanées des myofibrilles<sup>1</sup> [46]. L'origine de ces oscillations est donc à chercher dans la structure des muscles eux-mêmes. Le cadre théorique précédent fournit des explications à ces phénomènes. D'autre part, il a également été à la base d'une description des battements de l'axonème dans la nage des micro-organismes [14, 12]. Enfin les moteurs moléculaires jouent un rôle important dans le comportement mécanique de la touffe ciliaire des cellules de l'oreille interne, dont nous parlons ci-dessous.

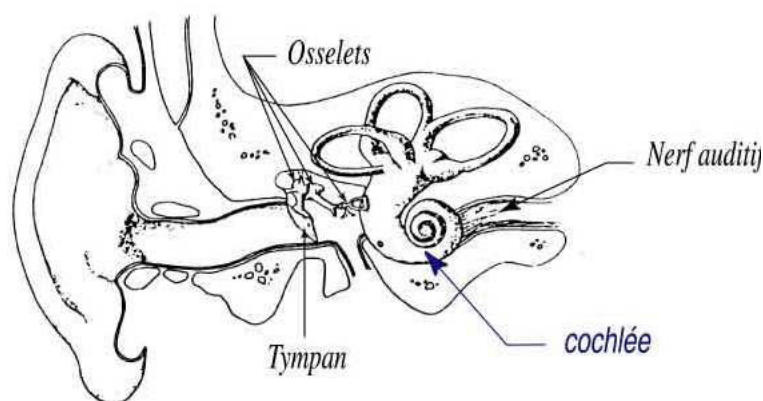
### Oscillations critiques, amplification et sélectivité en fréquences de l'organe auditif

La détection du son chez un animal se fait par transformation d'un signal mécanique en un signal électrique. Chez les mammifères, les ondes de pression porteuses du signal sonore sont transmises via l'oreille moyenne à la cochlée, dans laquelle elles se propagent le long de la membrane basilaire [52, 25] (voir la figure 1.2). Ce mouvement est détecté par les cellules ciliées, cellules sensorielles auditives, qui sont situées dans l'organe de Corti, organe sensori-nerveux de la cochlée [68] (voir la figure 1.3). Une cochlée humaine contient approximativement seize mille cellules ciliées. Chacune de ces cellules répond préférentiellement à une fréquence. La gamme de fréquences ainsi couverte s'étend sur deux voire trois ordres de grandeur<sup>2</sup>. Les cellules ciliées possèdent à leur surface une touffe ciliaire, formée d'une dizaine à une centaine de stéréocils, et qui est un transformateur d'un signal mécanique en un signal électrique [63] (voir la figure 1.4). Ces stéréocils, structures essentiellement cylindriques et closes par la membrane cellulaire, sont longs de quelques microns et d'un diamètre de quelques centaines de nanomètres. Ils contiennent de nombreux filaments du cytosquelette, et sont par conséquent relativement rigides à cette échelle. Dans la membrane cellulaire se trouvent des canaux ioniques mécano-sensibles, dont l'ouverture serait contrôlée par la tension exercée par de fins filaments, les "tip link", joignant les stéréocils voisins [82] (voir la figure 1.5). Les différences de tension dans les tip link résulteraient du glissement relatif de deux stéréocils voisins, qui peuvent pivoter à leurs bases en réponse aux déformations mécaniques induites par l'arrivée de

---

<sup>1</sup>Fibres musculaires élémentaires

<sup>2</sup>Chez l'homme, la gamme de fréquences couverte s'étend de la vingtaine de Hz jusqu'à environ 20 kHz.



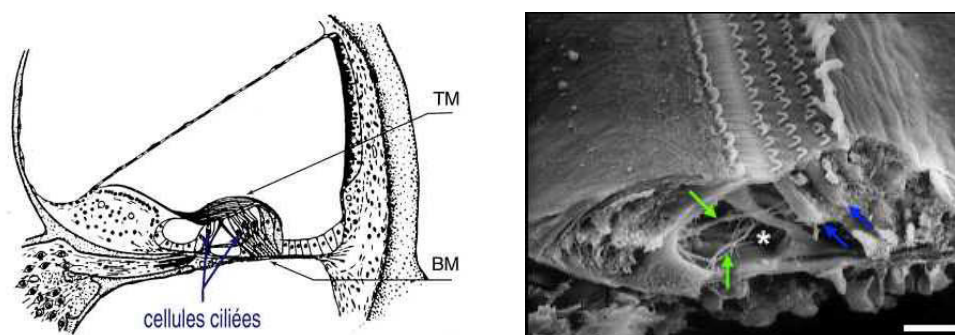
**FIG. 1.2:** Schéma d'une oreille humaine. Les vibrations sonores de l'air environnant font vibrer le tympan et sont transmises via les osselets à la cochlée. Après transformation du signal par les cellules ciliées, le nerf auditif transmet l'information au cerveau.

l'onde de pression. Finalement, le flux induit d'ions à travers les canaux, formé essentiellement d'ions  $Ca^{++}$  et  $K^+$ , change le potentiel transmembranaire de la cellule, ce qui est à l'origine du signal nerveux<sup>3</sup>.

Le système auditif est un détecteur extrêmement performant. Outre l'étendue du spectre qu'il couvre, il est capable de détecter sur une large gamme d'amplitudes sonores qui s'étend sur 120 dB ou 12 ordres de grandeur en intensité. Le seuil d'amplitude du son audible se situe en-dessous du bruit propre du système [29]. Ces performances sont certainement dues à la présence de mécanismes actifs, ce qu'avait déjà suggéré Thomas Gold en 1948 [48]. Des oscillations spontanées des cils de cellules auditives isolées de grenouille ont été directement observées [97], et des mécanismes complexes non linéaires ont été mis en évidence [22, 66]. La réponse de ces cellules isolées à un stimulus extérieur, lorsque la fréquence du stimulus exercé correspond à la fréquence des oscillations spontanées, est non linéaire et amplifiée sur toute une gamme d'amplitudes [98, 38]. Par comparaison des deux fonctions, il a été démontré que le système consomme de l'énergie et brise la relation Fluctuation-Dissipation propre aux systèmes opérant à l'équilibre thermique [99].

Différents mécanismes, basés sur la structure microscopique des stéréocils et de leur organisation, ont été proposés pour expliquer ces phénomènes [21]. Les stéréocils contiennent des moteurs moléculaires couplés en grand nombre et les études théoriques présentées précédemment au sujet des protéines motrices pourraient expliquer la présence d'oscillations spontanées des cils auditifs. D'autre part, les moteurs moléculaires pourraient jouer un rôle important dans un mécanisme d'adaptation de la tension exercée sur les canaux ioniques, lorsque la touffe ciliaire est inclinée avec un angle lentement variable [69, 63]. Une raideur négative de la touffe ciliaire dans un certain régime de forces appliquées

<sup>3</sup>Pour une présentation générale, voir [1].



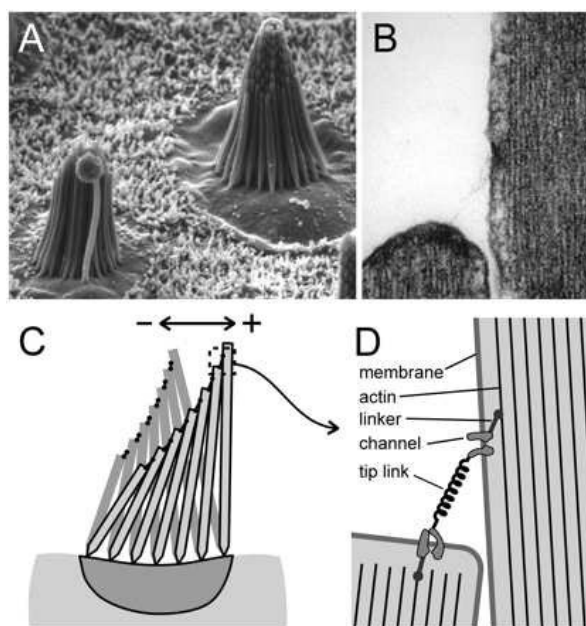
**FIG. 1.3:** Schéma en coupe et photographie en microscopie électronique à balayage de l'organe de Corti chez les mammifères. Les cellules ciliées sont comprises entre la membrane basilaire, porteuse des ondes acoustiques, et la membrane tectoriale qui coiffe les stéréocils. Dans la photographie de droite, les touffes ciliaires “en V” surmontent les corps cellulaires, et l’astérisque indique le tunnel de Corti, traversé par des fibres nerveuses. Echelle : 20  $\mu\text{m}$ . Source : <http://www.iurc.montp.inserm.fr/cric/audition/>.

a été mesurée, et cette propriété fournit au système un mécanisme d’amplification des faibles stimuli [100]. Plus génériquement, les propriétés observées sont caractéristiques d’un système bruité se trouvant au voisinage d’une bifurcation de Hopf [111, 99]. Ce point de l’espace des phases est le point où le système est le plus sensible aux faibles stimuli, et le plus sélectif en fréquence.

Plus globalement, à l’échelle de la cochlée, la réponse mécanique de la membrane basilaire révèle un comportement non-linéaire actif de l’organe auditif [24, 36, 119]. L’amplitude de l’onde sonore propageante varie le long de la membrane basilaire [151]. Une amplification active et localisée de cette onde permet d’augmenter la sélectivité en fréquence des cellules sensorielles ainsi que les performances du système dans les faibles amplitudes [35]. En particulier, la réponse mécanique d’un point donné de la membrane basilaire, caractérisée par une amplitude  $X$ , montre, en fonction de l’amplitude  $P$  de l’onde sonore appliquée et autour d’une fréquence particulière, un comportement non-linéaire proche d’un comportement d’échelle  $|X| \propto |P|^{1/\delta}$  sur une large gamme d’amplitudes [121] (voir la figure 1.6). Il a été proposé que le mécanisme actif responsable de ces propriétés soit localisé dans les cellules ciliées et qu’une boucle de rétroaction garde le système au voisinage d’un point de bifurcation de Hopf [13, 12, 77]. Le comportement d’échelle observé dans la réponse mécanique de la membrane basilaire à une onde sonore incidente peut être reproduit par les équations génériques régissant la réponse des systèmes dynamiques non-linéaires à un stimulus sinusoïdal, lorsque le système se trouve au voisinage d’un point de bifurcation de Hopf. En effet, la réponse  $X(t)$  d’un tel système à une force sinusoïdale  $F(t) = F_1 e^{i\omega t} + F_{-1} e^{-i\omega t}$ , en absence d’oscillations spontanées et si l’on ignore les modes transitoires, obéit à l’équation générique suivante [13] :

$$F_1 \simeq \mathcal{A}X_1 + \mathcal{B}|X_1|^2 X_1 + O(|X_1|^5) \quad (1.1)$$

où  $X_1$  est le mode de Fourier de pulsation  $\omega$  de la variable  $X(t)$  (voir para-



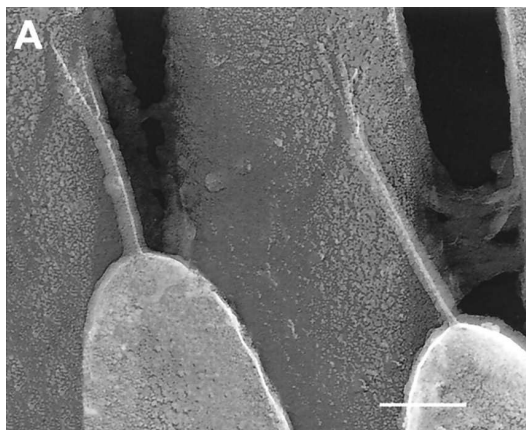
**FIG. 1.4:** Structure et fonction de la touffe ciliaire. (A) Micrographie électronique ( $\times 2500$ ) de deux touffes ciliaires de grenouille (bullfrog). (B) Micrographie électronique ( $\times 50,000$ ) du sommet d'un stéréocil et de son voisin, relié par un "tip link". (C) et (D) Diagrammes schématiques d'une touffe ciliaire et de la photographie (B). Lors d'une déformation mécanique induite par une onde acoustique, le tip link se tend et ouvre les canaux ioniques situés dans la membrane du stéréocil. Le canal est lié, via des moteurs moléculaires, au cytosquelette du stéréocil [63].

graphe 1.2.1). Dans cette équation,  $\mathcal{A}(\omega, C)$  et  $\mathcal{B}(\omega, C)$  sont des nombres complexes dépendant de la fréquence et du paramètre de contrôle  $C$ . Une bifurcation de Hopf a lieu pour une certaine valeur critique  $C_c$  du paramètre de contrôle  $C$ , pour laquelle  $\mathcal{A}$  s'annule à une certaine pulsation  $\omega_c$ . A la bifurcation, la réponse du système à la fréquence critique suit approximativement la loi suivante :

$$|X_1| \simeq |\mathcal{B}|^{-1/3} |F_1|^{1/3} \quad (1.2)$$

Loin de la fréquence critique, la réponse du système est linéaire. Ce comportement générique permet à la fois d'augmenter la sélectivité en fréquence des cellules ciliées, d'amplifier la réponse aux faibles stimuli et de l'atténuer pour les sons forts. Ces comportements génériques permettent de reproduire les données expérimentales concernant les performances détectrices de la cochlée en fonction de la fréquence [95], et font du système auditif un détecteur extrêmement performant.

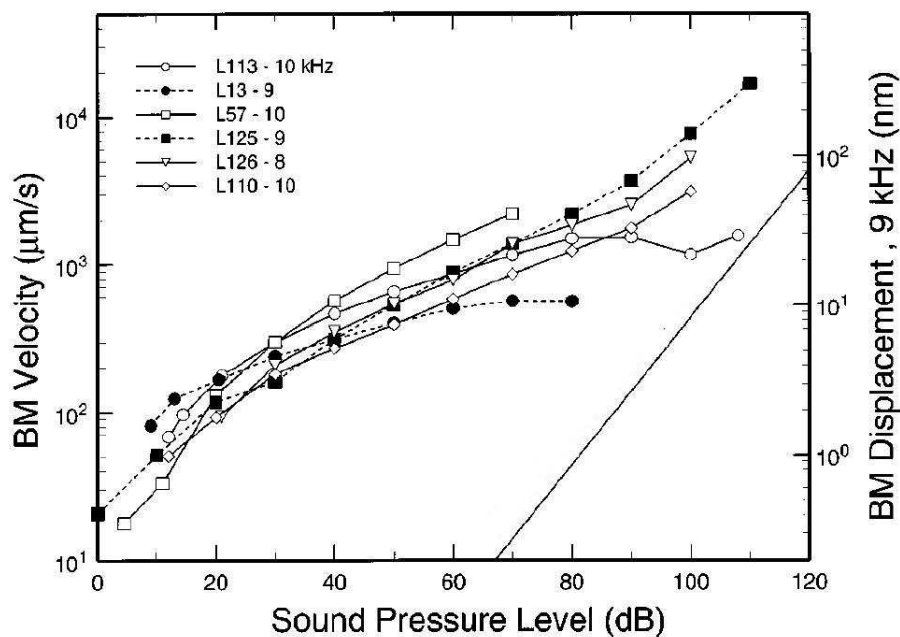
A l'échelle de la touffe ciliaire, les oscillations observées révèlent la présence d'importantes fluctuations [98, 99]. Ces fluctuations, dues entre autres aux effets de température finie et à la stochasticité des mécanismes actifs dans le système qui reposent, comme c'est généralement le cas en biologie, sur des réac-



**FIG. 1.5:** Micrographie de haute résolution de tip links de cellules ciliées de cochon. Echelle 100 nm [82].

tions chimiques, pourraient jouer un rôle important dans les propriétés de l'organe auditif. Une description théorique complète du système nécessite donc leur prise en compte [81]. Génériquement, nous savons que les fluctuations jouent un rôle déterminant dans le comportement collectif des systèmes couplés au voisinage des transitions de phase dynamiques. Si, comme les résultats présentés précédemment tendent à le montrer, chaque cellule ciliée constitue un oscillateur critique bruité, une description théorique de la cochlée nécessite une théorie des oscillateurs couplés en présence de bruit. D'importants travaux de recherche ont été effectués dans ce domaine, notamment sur la synchronisation des oscillateurs [113, 42]. Curieusement, le bruit a souvent pour effet de synchroniser les oscillateurs, alors que la dynamique déterministe associée est chaotique [102, 112, 148, 149]. Dans les systèmes d'oscillateurs couplés spatialement étendus, et dans la limite thermodynamique, l'équation déterministe générique décrivant le comportement d'une instabilité dynamique oscillante et homogène (ou bifurcation de Hopf) est l'équation Ginzburg-Landau complexe [3], introduite par Newell et Whitehead [108] (voir section suivante). Il s'agit d'une équation essentielle pour la description des mécanismes génériques de formations de structures dues à l'instabilité dynamique d'un état homogène [23]. Son diagramme de phase est extrêmement complexe du côté instable de la bifurcation (voir par exemple en dimension 2 la référence [19]), et a donné lieu à un nombre important de travaux mathématiques et physiques (voir la revue [3]). Les solutions ondes planes de cette équation deviennent toutes instables si l'on franchit une certaine ligne de l'espace des paramètres (critère de Newell et instabilité de Benjamin-Feir). La dynamique déterministe est alors chaotique, et l'ajout de bruit peut ici aussi avoir un effet structurant [30, 31, 115].

Dans cette thèse, nous nous proposons d'étudier les propriétés critiques de la bifurcation de Hopf d'oscillateurs couplés en grand nombre, en présence de bruit et du côté non-oscillant de la bifurcation. La dynamique générique de tels systèmes est décrite par l'équation Ginzburg-Landau complexe en présence de



**FIG. 1.6:** Réponses en vitesse et en amplitude des déformations mécaniques de la membrane basilaire pour six différentes cochlées de mammifère à des sons purs. L'échelle de droite n'est rigoureusement exacte que pour une fréquence de 9 kHz. La ligne de droite indique une croissance linéaire [121].

bruit.

## 1.2 Instabilités dynamiques et comportements universels hors équilibre

Nous quittons maintenant le domaine de la biophysique pour nous intéresser de plus près aux comportements universels et non-universels des systèmes situés au voisinage des instabilités dynamiques. Nous commençons dans cette section par présenter le cadre mathématique général des bifurcations, et spécifions sous quelles hypothèses nous observons ce dont nous avons déjà parlé, à savoir une bifurcation de Hopf. Nous présentons ensuite les équations génériques décrivant la dynamique d'un système spatialement étendu au voisinage d'une instabilité oscillante homogène<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Nous pouvons trouver des exposés détaillés de ces notions dans les références [96, 125].

## 1.2.1 Bifurcations et instabilités dynamiques

### Bifurcations

Considérons un système physique étendu en espace dont l'état instantané peut être caractérisé par la donnée d'un ensemble de *variables d'état* (ou *degrés de liberté* du système), qui sont définies en chaque point de l'espace :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \equiv \{Q_j(\mathbf{x}, t); j = 1, 2, \dots, N\} \quad (1.3)$$

Supposons que leur évolution temporelle soit dictée par la donnée d'un système d'équations aux dérivées partielles autonome en temps et en espace<sup>5</sup>, faisant intervenir les variables d'état prises au même instant  $t$ , et un jeu de paramètres  $\Omega$ . Ceci nous place en particulier dans le cadre de l'étude des systèmes invariants par translations spatiales et temporelles et dont la dynamique ne garde pas la mémoire des états passés. Quitte à agrandir l'espace des variables d'état, nous pouvons toujours nous ramener à une dynamique du premier ordre en temps ne faisant intervenir que des variables réelles :

$$\partial_t \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}[\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t), \partial_{x_i} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t), \dots; \Omega] \quad (1.4)$$

Nous appelons "bifurcation" un changement qualitatif dans le comportement à temps long du système pour une classe de conditions initiales données, lorsque l'on change la valeur de certains des paramètres  $\Omega$ , appelés "paramètres de contrôle" de la bifurcation. Très souvent, les bifurcations correspondent à la perte de stabilité ou la disparition d'"ensembles limites"<sup>6</sup>. Suffisamment près de la bifurcation, et dans le cas où la déstabilisation ne crée que de petites perturbations autour de l'ensemble limite, la dynamique du système peut être décrite par une équation dynamique simple et générique, écrite en termes de l'amplitude des perturbations, et appelée "forme normale" de la bifurcation. Dans ce voisinage, de nombreux systèmes dynamiques, ayant ailleurs des comportements possiblement très différents, se comportent donc de la même manière, indépendamment des caractéristiques spécifiques de chacun de ces systèmes.

Considérons tout d'abord le cas d'un système sans dépendance spatiale. L'équation (1.4) s'écrit alors :

$$\partial_t \mathbf{Q} = \mathcal{F}(\mathbf{Q}, \Omega) \quad (1.5)$$

Supposons que nous connaissions une solution  $\mathbf{Q}_0(t)$  du "régime permanent"<sup>7</sup> qui change de stabilité sous les hypothèses génériques précédentes. La dynamique autour de la solution  $\mathbf{Q}_0(t)$  peut alors être développée perturbativement en puissances de la variables  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}(t) - \mathbf{Q}_0(t)$  :

$$\partial_t \mathbf{q} = \mathcal{L}(\Omega) \mathbf{q} + \mathcal{O}(|\mathbf{q}|^2) \quad (1.6)$$

---

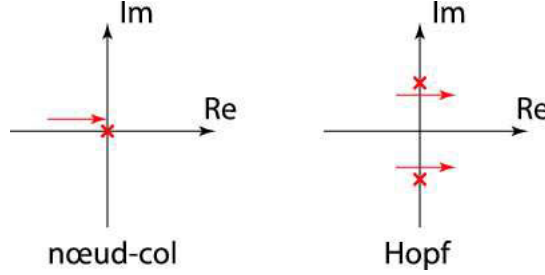
<sup>5</sup>C'est à dire dans lequel les variables de temps et d'espace  $t$  et  $\mathbf{x}$  n'apparaissent pas explicitement.

<sup>6</sup>Ensemble d'états  $\{\mathbf{Q}\}$  du système pour lequel chaque trajectoire initialisée dans un voisinage donné de l'ensemble y retourne indéfiniment.

<sup>7</sup>C'est à dire une solution qui évolue sur un ensemble limite.



où  $\mathcal{L}(\Omega)$  est une matrice réelle dépendant des paramètres  $\Omega$  du système. Dans le domaine stable, toutes les valeurs propres de  $\mathcal{L}(\Omega)$  ont une partie réelle négative. En un point de bifurcation, nous trouvons génériquement deux cas, appelés “bifurcation noeud-col” et “bifurcation de Hopf”. La distinction se fait suivant la valeur de la partie imaginaire de la valeur propre du mode instable<sup>8</sup> à la bifurcation (voir la figure 1.7). Dans le cas de la bifurcation noeud-col, cette partie



**FIG. 1.7:** Valeurs des valeurs propres des modes instables pour une bifurcation de type noeud-col et une bifurcation de Hopf.

imaginaire est nulle. Génériquement, une et une seule valeur propre s’annule alors à la bifurcation, les autres ayant une partie réelle strictement négative. Dans le cas contraire, cas de la bifurcation de Hopf, et toujours génériquement, deux (et seulement deux) valeurs propres complexes conjuguées voient leurs parties réelles s’annuler à la bifurcation. Dans les deux cas, la dynamique aux temps longs est dominée par les valeurs propres dont la partie réelle s’annule. En effet, les inverses de ces parties réelles correspondent aux temps de relaxation du système à l’ordre linéaire dans les directions propres. Après un temps caractéristique fini, seules les directions associées aux modes instables gardent une évolution dynamique.

Le cas de la bifurcation de Hopf est examiné en détails dans le paragraphe suivant. Considérons donc tout d’abord le cas des bifurcations noeud-col. Nous pouvons alors nous retravailler à une dynamique à une dimension, décrivant l’évolution d’une variable  $Y$  que nous appellerons, par analogie avec les transitions de phase, “paramètre d’ordre”. Plusieurs classes de bifurcations peuvent être distinguées, mais si l’on impose la symétrie  $Y \rightarrow -Y$  la dynamique peut toujours s’écrire :

$$\partial_t Y = -rY - uY^3 + \mathcal{O}(Y^5) \quad (1.7)$$

La bifurcation est, dans ce cas, une sous-classe des bifurcation noeud-col, et est appelée “bifurcation fourche”. Elle a lieu lorsque la valeur de  $r$ , qui constitue le paramètre de contrôle de la bifurcation, passe par zéro. Plusieurs sous-cas peuvent à nouveau être distingués :

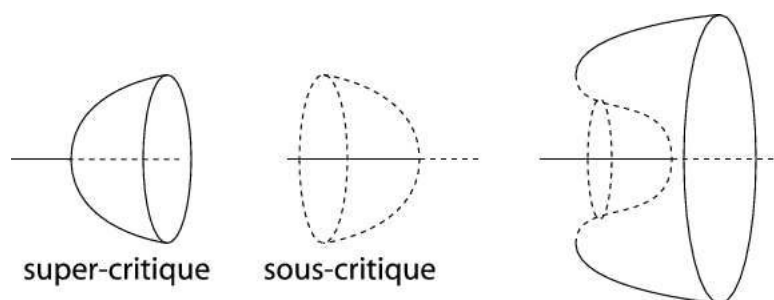
- i) Si  $u$  est positif, les termes d’ordres supérieurs peuvent être négligés ; le paramètre d’ordre  $Y$  est continu à la bifurcation et celle-ci est dite “supercritique”.

<sup>8</sup> Il s’agit du mode associé à la valeur propre de plus grande partie réelle.

- ii) Dans le cas contraire, il faut prolonger le développement jusqu'au premier ordre dont le coefficient est positif. Pour certaines valeurs du paramètre  $r$ , il y a coexistence de plusieurs états d'équilibre du système ; l'état d'équilibre choisi par le système dépend alors du chemin suivi dans l'espace des paramètres et des cycles d'hystérésis peuvent apparaître. Le paramètre d'ordre est discontinu à la bifurcation et la bifurcation est dite "sous-critique".

### Bifurcation de Hopf

Considérons maintenant le cas où deux valeurs propres complexes conjuguées voient leur partie réelle s'annuler simultanément à la bifurcation, ou cas de la bifurcation de Hopf (voir la figure 1.8). Le théorème de Poincaré-Dulac nous



**FIG. 1.8:** Diagramme de bifurcation d'une bifurcation de Hopf. Les diagrammes représentent l'ensemble des points du plan complexe couvert par les solutions du régime permanent  $Z(t)$  de la forme normale (1.8). Les lignes en trait plein représentent les solutions stables, et les lignes en pointillés les solutions instables. Dans le cas sous-critique, les solutions stables sont discontinues à la bifurcation.

affirme qu'il existe un changement de variable non-linéaire permettant d'écrire la dynamique sous la forme normale suivante :

$$\partial_t Z = -(r + i\omega_0)Z - (u + iu_a) |Z|^2 Z + \mathcal{O}(|Z|^4) \quad (1.8)$$

où  $Z$  est une variable complexe, et où les paramètres  $r$ ,  $\omega_0$ ,  $u$  et  $u_a$  sont réels.

Nous retrouvons la distinction mentionnée précédemment : en fonction du signe de  $u$ , la bifurcation est sous- ou super-critique. Dans le cas super-critique, nous pouvons négliger les non-linéarités d'ordre supérieur. En écrivant  $Z = |Z| \exp(i\phi)$ , et en séparant les parties réelles et imaginaires dans la dynamique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \partial_t |Z| &= -(r + u |Z|^2) |Z| \\ \partial_t \phi &= -(\omega_0 + u_a |Z|^2) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Nous retrouvons donc pour le module  $|Z|$  une dynamique dérivant d'un potentiel, définie sur le demi-axe des valeurs réelles positives. Le paramètre de contrôle de la bifurcation est  $r$ , et nous trouvons deux solutions du régime permanent :

- i) La solution triviale  $Z(t) \equiv 0$ , stable pour des valeurs positives de  $r$ , et instable autrement.

- ii) La solution  $Z(t) = \sqrt{\frac{-r}{u}} e^{-i\omega_s t}$ , avec  $\omega_s = \omega_0 - ru_a/u$ , qui n'existe que pour des valeurs négatives de  $r$ , et qui est alors stable. Cette solution est appelée "cycle limite".

Les trajectoires spiralent vers l'origine pour  $r > 0$  et vers le cycle limite pour  $r < 0$ .

### Bifurcation de Hopf revisitée

Physiquement, nous sommes intéressés par l'amplitude des oscillations d'une variable dynamique  $X$ , qui représente par exemple une position, en réponse à un stimulus (ou force) sinusoïdal  $F(t) = F_1 e^{i\omega t} + F_{-1} e^{-i\omega t}$  (où  $F_{-1} = F_1^*$ ). En absence d'oscillations spontanées, et si l'on ignore les modes transitoires, la réponse  $X(t)$  peut être décomposée en une série de Fourier  $X(t) = \sum_n X_n e^{in\omega t}$  (et  $X_{-n} = X_n^*$ ). Génériquement, nous pouvons alors écrire la force dans un développement systématique en puissances de  $X$  :

$$F_k = F_{kl}^{(1)} X_l + F_{klm}^{(2)} X_l X_m + F_{klmn}^{(3)} X_l X_m X_n + \mathcal{O}(X^4) \quad (1.10)$$

Au voisinage d'un point de bifurcation et à force nulle, les oscillations spontanées sont périodiques, et nous pouvons sans perte de généralité supposer une instabilité du mode  $X_1$ . A faible force ce mode domine les autres et le développement précédent se réduit, aux ordres dominants, à la forme (1.1).

Lors de la transformation du système originel en une équation dynamique sous forme normale, nous commençons par diagonaliser la matrice du problème linéarisé autour de la solution stationnaire dont l'instabilité mène au régime oscillant. Cette étape comporte un certain arbitraire dans le choix de la matrice de passage. On peut montrer qu'il est toujours possible d'exploiter cet arbitraire de telle sorte qu'à l'ordre linéaire la partie réelle du champ complexe  $Z$  soit égale à la variable physique  $X$ . Après cela les transformations non-linéaires, qui permettent d'achever l'écriture de la dynamique sous forme normale, n'affectent plus l'ordre linéaire, et nous pouvons donc toujours choisir le champ complexe de la forme normale tel que :

$$X = \frac{Z + Z^*}{2} + \mathcal{O}(|Z|^2) \quad (1.11)$$

Près de la bifurcation,  $X_1 \simeq (Z_1 + Z_{-1}^*)/2 \simeq Z_1/2$ , et l'équation (1.1) devient une équation pour le mode  $Z_1$ . Ceci nous assure que, suffisamment près du point de bifurcation, la présence de la force externe se traduit sur la forme normale par l'ajout d'une variable dynamique externe à l'ordre linéaire. Toutefois, la force physique se retrouve en général multipliée par un nombre complexe [81]. La forme générique de la bifurcation de Hopf d'un système en présence d'une force externe s'écrit donc :

$$\partial_t Z = -(r + i\omega_0)Z - (u + iu_a)|Z|^2 Z + f \quad (1.12)$$

où la variable complexe  $f$  est reliée à la force physique par :

$$f = (\mu + i\mu_a)F + \mathcal{O}(|FX|) \quad (1.13)$$

De façon à avoir une relation analogue à (1.11), nous choisirons de réécrire cette relation sous la forme suivante :

$$F = \Lambda e^{-i\theta} f + \mathcal{O}(|fZ|) \quad (1.14)$$

où  $\Lambda$  est un nombre réel positif et  $\theta$  une phase. Si  $Z$  représente une position,  $\Lambda$  représente une friction, et  $\theta$  un décalage de phase entre force et vitesse.

### Instabilité oscillante homogène

Analysons maintenant le cas des systèmes étendus en espace dans le cadre des hypothèses générales précisées au début de ce chapitre. Outre ces hypothèses, nous supposons qu'il existe un état homogène en espace et stationnaire en temps solution de la dynamique, et nous nous plaçons au voisinage d'une instabilité dynamique de cet état (pour le moment générale). En termes des perturbations autour de cet état, une équation linéarisée semblable à (1.6) peut être écrite. Comme le système est invariant par translations, la matrice apparaissant dans cette équation, et qui dépend maintenant de l'espace, est diagonale dans l'espace de Fourier, et les valeurs propres  $\lambda$  sont fonction de l'impulsion  $\mathbf{p}$  :  $\lambda(\mathbf{p}; \Omega) = -\sigma(\mathbf{p}; \Omega) - i\omega(\mathbf{p}; \Omega)$ , où  $\Omega$  est le paramètre de contrôle de la bifurcation<sup>9</sup>. A la bifurcation,  $\sigma(\mathbf{p}; \Omega)$  s'annule pour une certaine valeur critique  $\Omega_c$  du paramètre de contrôle et pour un certain vecteur d'onde critique  $\mathbf{p}_c$ . Ailleurs,  $\sigma(\mathbf{p}; \Omega)$  reste négatif et nous pouvons écrire localement le développement suivant :  $\sigma(\mathbf{p}; \Omega) = -\alpha(\Omega - \Omega_c) - \beta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_c)^2 + \dots$ . Remarquons que le cas d'un système isotrope en dimension d'espace supérieure à 1 impose au vecteur d'onde critique  $\mathbf{p}_c$  d'être nul. Nous nous placerons désormais dans ce cas. La partie imaginaire  $\omega(\mathbf{p}; \Omega)$  peut également être développée au voisinage de  $\mathbf{p}_c = \mathbf{0}$ , et l'isotropie impose au terme linéaire d'être nul. Les valeurs propres ont donc une dépendance quadratique dans les impulsions, ce qui se traduit sur l'équation dynamique écrite dans l'espace réel par la présence d'un terme de couplage spatial en  $\Delta Z$ , où  $\Delta$  représente l'opérateur laplacien. Dans le cas où  $\omega(\mathbf{0}; \Omega_c)$  est non nul, le système présente une instabilité dynamique oscillante homogène. Des arguments semblables à ceux développés précédemment dans le cadre de la bifurcation de Hopf nous assurent que, dans le cas d'une telle instabilité super-critique, cas auquel nous nous restreignons désormais, nous pouvons trouver un changement de variable non linéaire nous permettant d'écrire la dynamique sous la forme suivante :

$$\partial_t Z = -(r + i\omega_0)Z + (c + ic_a)\Delta Z - (u + iu_a)|Z|^2 Z + f \quad (1.15)$$

où les non-linéarités d'ordre supérieur en  $Z$  et ses dérivées ont été négligées. Dans cette équation,  $\Delta$  représente l'opérateur laplacien, et est issu de la dépendance quadratique dans les impulsions des valeurs propres du problème linéarisé.  $Z = Z(\mathbf{x}, t)$  est maintenant un champ défini en tous points de l'espace  $\mathbf{x}$  et à chaque instant  $t$ . D'autre part, puisque l'instabilité se produit pour le mode homogène, les autres modes sont linéairement stables à la transition, et le développement quadratique ci-dessus suppose  $c > 0$ . La transition est supposée

---

<sup>9</sup>La dépendance dans les autres paramètres peut être localement négligée.

super-critique, et le paramètre  $u$  est donc également positif. Les relations vues précédemment entre les quantités physiques et les champs de la forme normale sont encore valables. L'équation (1.15), en absence de champ externe, n'est autre que l'équation Ginzburg-Landau complexe [3, 96].

### 1.2.2 Comportements critiques hors équilibre et groupe de renormalisation

#### Importance des fluctuations

Le but de notre étude est de caractériser les propriétés génériques au voisinage de l'instabilité dynamique d'un système formé d'un grand nombre d'oscillateurs critiques couplés. La description de la section précédente omet une caractéristique physique essentielle de ce système : la présence de fluctuations qui rendent la dynamique stochastique. Comme nous l'avons signalé dans le cadre des systèmes biologiques présentés dans la section 1.1, les fluctuations (de nature thermique et chimique essentiellement) jouent, aux échelles de longueur caractéristiques de ces systèmes, un rôle important. Lorsque l'on s'intéresse au comportement du système dans le voisinage immédiat de l'instabilité, les fluctuations jouent en réalité un rôle tout à fait essentiel. Le langage est alors un peu différent, et on parle de "transitions de phase dynamiques" (ici loin de l'équilibre thermique) plutôt que d'instabilités dynamiques.

De manière générale, l'étude des transitions de phase concerne la description du comportement d'un système physique sur de grandes échelles de longueur par rapport aux échelles microscopiques. Le système étudié comporte alors un nombre immense de degrés de liberté, dont la description exacte serait techniquement irréalisable, et dont il serait difficile de déduire les comportements intéressants. En effet, nous sommes intéressés par le comportement d'un petit nombre de ces degrés de liberté, caractéristiques du comportement de grande échelle du système, et observables expérimentalement. Une description effective de la complexité due à la présence des très nombreux degrés de liberté microscopiques est toutefois nécessaire. Une solution consiste à coupler les variables dynamiques qui nous intéressent à un jeu de variables aléatoires représentant effectivement la présence des degrés de liberté microscopiques. L'aspect aléatoire ou stochastique de ce couplage provient du fait que nous ne connaissons pas l'évolution exacte des degrés de liberté microscopiques. En revanche, leur présence en grand nombre nous assure de pouvoir en faire une description statistique.

Il y a une contradiction apparente avec les arguments précédents qui menaient à une dynamique déterministe. Ceux-ci étaient fondés sur le postulat qu'à la bifurcation les degrés de liberté relaxaient tous vers un état statique, exceptés les très rares modes instables dont nous écrivons la dynamique. Mais en réalité, au niveau microscopique (par exemple dans un fluide), la dynamique est conservative : les molécules sont en agitation permanente, et l'énergie cinétique globale est conservée pour un système isolé. Ce fait est à l'origine, au niveau macroscopique, de la présence d'une température dans le système. Dans le cas des systèmes dits "à l'équilibre thermique", ce que l'on désigne par ce

terme correspond non pas à un état statique du système, mais à une distribution statistique de ses états possibles, caractérisée par le poids de probabilité de Boltzmann qui est lié à la température du système. La dynamique des systèmes se trouvant au voisinage de l'équilibre de Boltzmann, et relaxant aux temps longs vers cet équilibre, est dite "dynamique relaxationnelle" ou encore "dynamique d'équilibre". Dans ce cas, le couplage de l'évolution des variables qui nous intéressent avec ces degrés de liberté rapides et microscopiques ne doit pas s'éteindre avec le temps, mais être décrit par un bruit statistique effectif. Suivant l'idée d'une dynamique newtonienne du fluide environnant, nous choisissons un bruit additif, c'est à dire agissant comme une force brownienne sur les grandeurs observables<sup>10</sup>. L'équation ainsi déduite constitue alors une équation de Langevin [106, 18, 129]. Signalons enfin que la relaxation aux temps longs de la dynamique vers l'équilibre de Boltzmann impose des contraintes sur le bruit. Notamment, l'amplitude de ses corrélateurs est directement liée à la température via l'équation d'Einstein [117, 18].

Dans le cas des systèmes biologiques actifs, nous trouvons, en plus de cette agitation thermique naturellement présente, des fluctuations liées aux occurrences aléatoires des réactions chimiques, qui constituent la source d'énergie pour les forces actives dans le système. Cette force active est donc elle aussi stochastique. Ses fluctuations peuvent, suivant les idées précédentes, être également prises en compte de manière effective dans la force brownienne. En revanche, il n'y a pas dans ce cas de relaxation aux temps longs vers une distribution d'équilibre, et les corrélateurs du bruit briseront *a priori* l'équation d'Einstein.

Les transitions de phase dynamiques (proches ou loin de l'équilibre thermique) sont le résultat d'une compétition entre l'ordre souhaité par les interactions microscopiques, qui tendent à homogénéiser l'état choisi par le système dans l'espace, et le désordre souhaité par le caractère probabiliste de la réalisation des différents états possibles du système. Si plusieurs configurations sont équiprobables, et si les fluctuations sont suffisamment importantes, celles-ci imposent au système de passer continuellement de l'une à l'autre de ces configurations, et ce sur des échelles de temps très courtes. De manière effective, le système se trouve alors dans un état moyen, ou désordonné. Lors d'une transition de phase du second ordre, analogue d'une bifurcation super-critique, les domaines corrélés de la phase désordonnée, c'est à dire les domaines d'espace dans lesquels l'état choisi par le système est homogène, ont une taille typique, appelée longueur de corrélation, et un "temps de vie" typique, appelé temps de corrélation, qui augmentent à la transition. Après celle-ci, la phase est ordonnée sur de grandes échelles de longueur, et l'ordre persiste dans le temps. Le système a choisi, au moins localement, de s'installer dans l'une des configurations possibles statistiquement et équiprobables, et d'y rester. En général, cet état possède un groupe de symétrie strictement inclus dans celui de la distribution statistique des différents états équiprobables possibles. Le système a "choisi" l'un des états possibles, et ce phénomène est connu sous le nom de "brisure spontanée de symétrie". Dans la phase ordonnée, la situation est inversée par rapport à la précédente. Nous trouvons alors des domaines fluctuants, se trouvant dans un

---

<sup>10</sup>L'expression des corrélateurs de ce bruit sont discutés dans l'annexe B.

autre état que l'état qui a été globalement choisi, et dont la taille et le temps de vie divergent si nous approchons à nouveau la transition. Au point de transition, désigné sous le nom de "point critique", nous trouvons des domaines ordonnés (resp. fluctuants, en fonction de la phase dont on provient) de toutes tailles. L'état du système est alors localement très inhomogène, et ceci est à l'origine par exemple du phénomène d'opalescence critique observé lors de la transition liquide-gaz (voir par exemple [18]).

Il nous faut signaler ici que, par rapport aux échelles microscopiques, les longueurs et temps de corrélation sont infinis à la transition, et la phase ordonnée apparaît ordonnée sur tout l'espace. Toutefois, sur des échelles macroscopiques, dans la phase ordonnée, les domaines dans lesquels l'état du système est uniforme restent d'extension spatiale finie. Ces domaines sont alors séparés par des frontières appelées "défauts topologiques".

Revenons maintenant sur l'origine et la pertinence d'une distinction entre deux langages (instabilités dynamiques et transitions de phase dynamiques) et deux types de description au voisinage des instabilités. Si l'on étudie par exemple les formations de structures dans les systèmes macroscopiques, les longueurs et énergies typiques mises en jeu sont telles que le bruit statistique dont nous venons de parler est souvent négligeable [23]. Toutefois, l'effet du bruit sur les bifurcations a été l'objet de nombreuses études (voir entre autres [50, 127, 140, 105, 62] et l'ouvrage [47]). Il en est souvent de même lorsque l'on s'intéresse au diagramme de phase d'une dynamique non-linéaire [3]. En revanche, comme nous l'avons vu ci-dessus, si nous étudions exactement le point de transition de phase, nous nous intéressons à des comportements caractéristiques des échelles "mésoscopiques"<sup>11</sup>. Les fluctuations jouent alors un rôle tout à fait essentiel dans le comportement quantitatif, voire qualitatif du système à la transition. Une autre façon de formuler la remarque consiste à dire que l'utilisation des formes normales déterministe concerne un domaine d'étude suffisamment proche de la transition pour que la forme universelle soit valide, mais suffisamment loin pour que les domaines fluctuants soient de taille infiniment faible. C'est en revanche l'étude du point critique d'une transition de phase dynamique hors équilibre qui nous intéresse ici, et c'est dans ce langage que nous nous placerons au cours de notre travail.

## Universalité et groupe de renormalisation

Comme nous l'avons dit, les longueur et temps de corrélation d'un système physique au voisinage d'une transition de phase dynamique divergent à la transition. L'idée du groupe de renormalisation est de relier les descriptions effectives d'une théorie physique donnée à des échelles différentes. A la transition, il n'y a plus de longueur ou de temps caractéristique dans le problème, et les descriptions effectives de la théorie sont les mêmes à toutes les échelles. La théorie est alors dite "invariante d'échelle". La transition de phase est donc cherchée comme point fixe des transformations de groupe de renormalisation. Nous verrons dans le chapitre 4 que, grâce au formalisme de théorie statistique des champs présenté

---

<sup>11</sup> Echelles intermédiaires entre les échelles microscopiques et macroscopiques.

dans le chapitre 2, nous pouvons écrire des équations différentielles qui régissent l'évolution des valeurs des paramètres de la théorie en fonction de l'échelle, et qui sont appelées "équations de groupe de renormalisation". Nous verrons qu'elles constituent un système d'équations différentielles homogènes<sup>12</sup>, non-linéaires et couplées du premier ordre.

Il faut noter que, dans le cas des transitions de phase du premier ordre, il y a coexistence de phases sur un domaine non nul de l'espace des paramètres. Ainsi, avant d'atteindre le point d'invariance d'échelle où elle devient instable, une phase donnée passe en général par un état *métastable*. Dans ce cas, la présence de fluctuations emmène le système vers une autre phase de plus basse énergie, et la propriété d'invariance d'échelle n'est donc jamais visible.

Dans le cas des transitions de phase du second ordre, nous pouvons linéariser les équations de groupe de renormalisation au voisinage du point fixe. Naturellement, deux théories seront qualitativement différentes si leur comportement effectif est décrit par des jeux de paramètres qui s'éloignent sous renormalisation. La transition de phase correspond donc à une séparatrice dans le diagramme de flot associé à l'évolution des paramètres en fonction de l'échelle. Il y a alors autant de directions instables ou répulsives des équations linéarisées au point fixe qu'il y a de paramètres de contrôle associés à la transition. Nous avons vu que la bifurcation de Hopf est contrôlée par un unique paramètre (noté  $r$  dans le paragraphe 1.2.1), et notre point fixe possédera donc une unique direction instable. La sous-variété des théories critiques sera, au moins localement, une hyper-surface dans l'espace des paramètres, appelée "surface critique". D'autre part, la propriété d'invariance d'échelle imposera aux grandeurs physiques dépendant de l'espace (typiquement les fonctions de corrélation de la théorie) de s'écrire sous la forme de "lois d'échelle" au point fixe<sup>13</sup>. Les exposants associés à ces lois d'échelle sont appelés "exposants critiques".

Nous voyons apparaître de manière renforcée la propriété d'universalité mentionnée lors de la mise sous forme normale de l'équation dynamique. A ce stade, la forme de l'équation était universelle, mais les paramètres dépendaient du système particulier considéré. Sous renormalisation, toutes les théories critiques, c'est à dire dont le jeu de paramètres se situe sur la surface critique (et dans le bassin d'attraction du point fixe), sont décrites aux grandes échelles par le même jeu de paramètres. L'"histoire" de l'évolution des paramètres sur la surface critique influence l'expression des grandeurs physiques, mais leurs comportements asymptotiques, dont on a justifié qu'ils pouvaient s'écrire sous forme de lois d'échelle, sont déterminés *uniquement* par les propriétés du point fixe. Les exposants critiques, sont des quantités *universelles*. D'autres part, comme l'évolution des paramètres au voisinage du point fixe est infiniment lente en fonction de l'échelle, si la théorie considérée n'est pas exactement critique mais suffisamment proche de la surface critique, l'évolution des paramètres sera décrite sur une large gamme d'échelles par les équations linéarisées au voisinage du point fixe. Ces équations sont également des propriétés du point fixe, et sont donc également universelles. L'existence d'un point fixe du groupe de renorma-

---

<sup>12</sup>C'est à dire ne dépendant pas explicitement de l'échelle.

<sup>13</sup>C'est à dire de s'écrire sous la forme de fonctions puissances.



lisation détermine donc une “classe d’universalité” de comportements critiques.

L’identification des différentes classes d’universalité et l’étude des propriétés universelles des systèmes appartenant à une classe donnée a été l’objet de nombreuses recherches. L’idée originelle des transformations de groupe de renormalisation pour la physique statistique a été formulée à partir du modèle d’Ising par Kadanoff [83, 88]. La formulation moderne du groupe de renormalisation est due à Wilson [141, 142]. Au-dessus de 4 dimensions, le comportement critique du modèle d’Ising correspond à celui prévu par la théorie champ moyen [39, 84, 11]. La technique de Wilson permet entre autres de développer un formalisme en dimension d’espace non entière, et d’effectuer un développement perturbatif autour de la théorie champ moyen en termes d’un développement en  $\varepsilon = 4 - d$ , où  $d$  est la dimension spatiale [146, 143, 147]. Après les articles originaux de Wilson, de nombreux auteurs ont appliqué les concepts développés en Théorie Quantique des Champs, comme par exemple les équations de Callan-Symanzik, aux phénomènes critiques (voir entre autres [34, 9]). De nombreuses revues de physique peuvent être consultées sur le sujet ; voir entre autres [92, 40, 144, 11, 139, 145]. Pour une revue relativement récente contenant une bibliographie conséquente voir [41].

Les techniques de renormalisation de Wilson et du développement perturbatif en  $\varepsilon$  ont été étendues à l’étude des phénomènes critiques dynamiques, et ont permis de montrer la brisure de la théorie conventionnelle de Van Hove [136, 137]. L’écriture de la dynamique stochastique sous la forme d’une équation de Langevin permet de dériver des modèles de dynamique critique à partir des hamiltoniens de Landau utilisés dans le cadre des phénomènes critiques statiques [27, 8]. La classification historique définissant ces modèles (modèles A à J) est due à Hohenberg et Halperin [61], et est basée sur des études antérieures [55, 56, 58, 57]. Un formalisme de théorie statistique des champs dynamiques a également été développé. Il utilise l’introduction d’un champ dynamique auxiliaire, déjà utilisé par Martin, Siggia et Rose pour effectuer des développements perturbatifs diagrammatiques [101], pour écrire une fonctionnelle génératrice dynamique [73, 26] (voir annexe D). Le modèle vectoriel général à  $n$  composante possédant la symétrie  $O(n)$  avait été auparavant étudié pour ses propriétés statiques [10]. La structure du groupe de renormalisation dynamique associée, lorsque la dynamique est écrite dans le cadre des modèles A (sans loi de conservation) et B (paramètre d’ordre conservé), a pu être établie au dessus de la température critique [6], puis, plus tard, dans la phase de symétrie brisée [135]. Une discussion plus générale de la renormalisation dynamique pour divers modèles peut être trouvée dans [28].

Loin de l’équilibre thermique, la relation restrictive prévue par le théorème Fluctuation-Dissipation [32], et due aux relations de bilan détaillé (voir 2.4.3), est brisée. L’étude des propriétés dynamiques critiques est alors étendue à une classe de systèmes beaucoup plus vaste, et présentant des structures beaucoup plus riches que celles existant près de l’équilibre thermique. Toutefois, les classes d’universalité standard sont souvent très robustes au regard des perturbations par rapport à l’équilibre. Dans le cas des dynamiques sans loi de conservation, et des dynamiques avec paramètre d’ordre conservé lorsque les perturbations sont isotropes, la balance détaillée est dynamiquement restaurée à la transition [131].

C'est le cas par exemple du modèle d'Ising cinétique [53, 51], même lorsque l'on brise la symétrie  $Z_2$  [5], et du modèle  $O(n)$  dynamique [133, 134]. Même dans le cadre de dynamiques plus générales, le phénomène peut encore se produire [122, 131].

Toutefois, de vraies classes d'universalité hors équilibre ont pu être identifiées. Un premier exemple important est l'étude de la dynamique de croissance de surface. L'équation générique associée à ce problème est due à Kardar, Parisi et Zhang et est connue sous le nom d'"équation KPZ" [86]. Elle est reliée à de nombreux problèmes, comme par exemple la dynamique de Burgers qui décrit la dynamique du champ de vitesse d'un fluide sans vortex. En dimension d'espace égale à 1, une relation Fluctuation-Dissipation existe et un calcul exact de l'exposant dynamique peut être effectué [86]. La structure du groupe de renormalisation a été étudiée avec bruit blanc [86] et bruit coloré [103]. Dans le cas du bruit blanc, les résultats sont connus à l'ordre de deux boucles en théorie des perturbations [44, 43], et des résultats exacts ont pu être dérivés dans le cas du bruit coloré au dessus de la dimension critique [76]. Voir aussi la revue [59]. Le second exemple important concerne les dynamiques de réaction-diffusion, qui peuvent prendre des formes diverses. Il s'agit de limites continues de modèles de marcheurs au hasard, soumis à des réactions de création ou d'annihilation. La transition concerne la croissance ou la disparition de la population. Le premier exemple de telles dynamiques qui ait été étudié concerne l'étude de la percolation dirigée [17] et isotrope [45]. Des modèles avec deux espèces de marcheurs ont également été étudiés [74, 132, 49, 75], ainsi que des modèles comportant des réactions à agents multiples [128, 16]. Enfin, signalons les modèles de réaction fission-annihilation [67, 109] et la revue [60]. Pour une présentation récente et générale de toutes ces études, voir [130].

L'objet de notre étude concerne les propriétés critiques d'une transition de phase dynamique hors équilibre. Nous nous intéressons à la caractérisation des propriétés universelles et non universelles des systèmes d'oscillateurs couplés dans la limite thermodynamique, et situés au voisinage d'une instabilité dynamique oscillante et homogène (ou bifurcation de Hopf), du côté non-oscillant de l'instabilité. L'équation dynamique générique décrivant le comportement de ces systèmes au voisinage de la bifurcation est l'équation (1.15), à laquelle il faut ajouter un bruit statistique additif, gaussien et non corrélé. Nous nous intéressons tout particulièrement à la fonction d'auto-corrélation et la fonction de réponse linéaire à une force externe dans le régime critique.

## Chapitre 2

# Théorie des champs d'oscillateurs couplés

Dans ce chapitre, nous présentons le formalisme théorique général que nous utiliserons pour étudier le comportement critique de notre système, à savoir un système d'oscillateurs couplés dans la limite thermodynamique au voisinage d'une instabilité oscillante homogène ou bifurcation de Hopf. Nous commençons par discuter le lien qui existe entre les quantités physiques dont nous voulons connaître la dynamique et l'équation générique qui décrit le comportement du système au voisinage de l'instabilité. Nous présentons cette équation et précisons ses caractéristiques. Nous présentons ensuite les observables physiques auxquelles nous allons consacrer notre étude, à savoir les fonctions de corrélation et de réponse à deux points de la théorie, et donnons leurs expressions en termes des variables de l'équation générique. Dans la section 2.3 nous présentons le formalisme de théorie statistique des champs associé à notre dynamique, qui est très semblable à celui du modèle  $O(n)$  dynamique écrit dans le cadre du modèle  $A$  de la classification de Hohenberg et Halperin, et expliquons comment dériver les fonctions qui nous intéressent dans ce cadre. Enfin, dans la section 2.4, nous présentons une transformation qui sera centrale tout au long de notre étude : nous montrons qu'une transformation simple sur les champs de la théorie nous permet d'éliminer la fréquence qui apparaît dans le jeu de paramètres de l'équation générique. Dans un cas particulier des valeurs des paramètres du modèle, nous pouvons alors faire une analogie exacte entre notre théorie et une théorie dynamique relaxationnelle connue : le modèle  $O(2)$  dynamique. Les études antérieures concernant ce modèle nous permettent de déduire, dans ce cas particulier, l'existence d'une transition de phase du second ordre associée à une instabilité oscillante homogène, et d'en déduire les lois d'échelles. Une extension de la relation Fluctuation-Dissipation, propre aux dynamiques d'équilibre, peut alors être dérivée pour notre système.

## 2.1 Quantités physiques et dynamique générique

### 2.1.1 Equation dynamique générique

D'après l'étude présentée dans le chapitre 1, l'équation dynamique que nous devons étudier, et qui décrit le comportement générique des systèmes physiques homogènes, invariants par translations spatiales et temporelles, et situés au voisinage d'une transition de phase oscillante homogène, est donnée par :

$$\partial_t Z = -(r + i\omega_0)Z + (c + ic_a)\Delta Z - (u + iu_a)|Z|^2 Z + f + \eta \quad (2.1)$$

Dans cette équation,  $Z(\mathbf{x}, t)$  est un champ complexe dépendant du temps et défini sur un espace à  $d$  dimensions.  $\Delta$  est l'opérateur laplacien sur cet espace,  $f$  un champ externe agissant sur le système et  $\eta$  un bruit blanc gaussien. Les différents paramètres sont des nombres réels, et  $c$  et  $u$  sont positifs. En absence de bruit et de champ externe l'équation est invariante par translations spatiales et temporelles et par l'invariance de phase globale  $Z \mapsto Z \exp(i\Theta)$ , qui n'est autre que la symétrie  $U(1)$ . Les champs qui apparaissent dans cette équation sont liés aux champs physiques auxquels nous nous intéressons par les relations suivantes :

$$X = \frac{Z + Z^*}{2} + \mathcal{O}(|Z|^2) \quad F = \Lambda e^{-i\theta} f + \mathcal{O}(|fZ|) \quad (2.2)$$

où  $\Lambda$  est un nombre réel positif et  $\theta$  une phase. Si  $Z$  représente une position,  $\Lambda$  représente une friction, et  $\theta$  un décalage de phase entre force et vitesse.

### 2.1.2 Corrélateurs du bruit

Comme nous le justifions dans l'annexe B, le bruit  $\eta$  peut être choisi gaussien et non corrélé. Dans ces conditions, nous n'avons à préciser que son second moment. Le bruit  $\eta$  étant a priori une variable aléatoire complexe, nous avons deux corrélateurs à préciser :  $\langle \eta(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}', t') \rangle$  et  $\langle \eta(\mathbf{x}, t)\eta^*(\mathbf{x}', t') \rangle$ . Nous allons justifier que le corrélateur  $\langle \eta(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}', t') \rangle$  peut être ignoré pour l'étude du comportement critique qui nous intéresse.

Considérons la dynamique du mode instable  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  du côté non-oscillant de la transition, en absence de champ externe et à l'ordre linéaire. Dans ces conditions, nous pouvons résoudre exactement l'équation (2.1). Avec les conventions de l'annexe A, la transformée de Fourier  $Z(\omega)$  du champ  $Z$  est donné par :

$$Z(\omega) = \frac{\eta}{r + i(\omega_0 - \omega)} \quad (2.3)$$

L'équation (2.2) nous donne une expression analogue pour la variable dynamique physique  $X$ , valable à l'ordre linéaire :

$$X(\omega) \simeq \frac{Z(\omega) + (Z(-\omega))^*}{2} \quad (2.4)$$

Dans l'espace de Fourier, les corrélateurs d'un bruit blanc sont des constantes, et nous notons  $4\tilde{D}$  l'amplitude du corrélateur  $\langle \eta\eta \rangle$ , et  $4D$  celle de  $\langle \eta\eta^* \rangle$  dans

cet espace.  $D$  est un nombre réel positif, et  $\tilde{D}$  est un nombre complexe. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \langle X(\omega)X(-\omega) \rangle &= \frac{D}{r^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \frac{D}{r^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \\ &+ 2\text{Re} \left[ \frac{\tilde{D}}{(r + i(\omega + \omega_0))(r - i(\omega - \omega_0))} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

A l'approche du mode critique  $\omega_0$ , les parties proportionnelles à  $\tilde{D}$  ne divergent qu'avec une loi de puissance d'exposant  $-1$ , alors que les parties proportionnelles à  $D$  divergent en  $1/(\omega - \omega_0)^2$ . La loi d'échelle du mode critique n'est donc pas affectée par la présence du corrélateur  $\langle \eta\eta \rangle$ , qui peut par conséquent être ignoré.

Un autre argument consiste à analyser les symétries du problème. Comme nous l'avons signalé, l'équation (2.1) est invariante de phase en l'absence de force, de bruit et de champ externe. D'autre part, la forme normale de la bifurcation de Hopf est invariante de phase, et l'écriture (1.8) peut être généralisée à tout ordre en puissance des non-linéarités, à l'aide d'un changement de variables non-linéaire, calculé ordre par ordre dans le développement. Pour l'établissement des classes d'universalité associées aux transitions de phase, nous savons que les symétries du problème jouent un rôle crucial. De façon à nous placer dans la classe d'universalité de la bifurcation de Hopf, il nous faut écrire une équation dynamique invariante de phase. Nous étudions donc le cas d'un bruit stochastique qui ne brise pas cette invariance. Dans ce cas, nous devons imposer à l'amplitude  $\langle \eta\eta \rangle$  d'être égale à zéro.

Suivant ces arguments et ceux présentés dans l'annexe B, le second moment du bruit statistique  $\eta$  peut, pour l'étude qui nous intéresse, s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \langle \eta(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}', t') \rangle &= 0 \\ \langle \eta(\mathbf{x}, t)\eta^*(\mathbf{x}', t') \rangle &= 4D\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $D$  est un nombre réel positif.

## 2.2 Fonctions de corrélation et de réponse

Intéressons nous maintenant aux observables physiques qui contiennent les principales caractéristiques du problème. Il s'agit de  $\tilde{C}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  et  $\tilde{\chi}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ , respectivement la fonction de corrélation connexe à deux points et la fonction de réponse à une force externe, toutes deux considérées à force nulle. L'invariance par translations spatiales et temporelles du système implique que ces deux fonctions dépendent uniquement des différences  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  et  $(t - t')$ . Ces deux fonctions ont pour définition :

$$\begin{aligned} \tilde{C}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = C(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &\equiv \langle X(\mathbf{x}, t)X(\mathbf{x}', t') \rangle_c \\ &\equiv \langle X(\mathbf{x}, t)X(\mathbf{x}', t') \rangle - \langle X(\mathbf{x}, t) \rangle \langle X(\mathbf{x}', t') \rangle \\ \tilde{\chi}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &\equiv \frac{\delta \langle X(\mathbf{x}, t) \rangle}{\delta F(\mathbf{x}', t')} \Big|_{F \equiv 0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

On a alors la propriété suivante :

$$\delta\langle X(\mathbf{x}, t) \rangle = \int d^d x' dt' \chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \delta F(\mathbf{x}', t') \quad (2.8)$$

et la causalité implique que la fonction de réponse  $\chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')$  soit proportionnelle à  $\theta(t - t')$ , où  $\theta$  est la fonction créneau de Heaviside :

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

En utilisant les relations (2.2) à l'ordre linéaire, nous pouvons relier ces fonctions aux quantités qui apparaissent dans l'écriture de la forme générique (2.1). Nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &\simeq \langle Z^R(\mathbf{x}, t) Z^R(\mathbf{x}', t') \rangle - \langle Z^R(\mathbf{x}, t) \rangle \langle Z^R(\mathbf{x}', t') \rangle \\ \chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &\simeq \frac{\delta\langle Z^R(\mathbf{x}, t) \rangle}{\delta f^R(\mathbf{x}', t')} \frac{\cos \theta}{\Lambda} + \frac{\delta\langle Z^R(\mathbf{x}, t) \rangle}{\delta f^I(\mathbf{x}', t')} \frac{\sin \theta}{\Lambda} \end{aligned} \quad (2.10)$$

où les dérivées sont prises en  $f \equiv 0$ . Au voisinage de la transition, l'amplitude du champ à force nulle est infiniment faible ; les non-linéarités présentes dans le changement de variables (2.2) n'apportent donc que des corrections d'ordre supérieur et peuvent être négligées pour l'étude qui nous intéresse.

## 2.3 Formalisme de théorie des champs

### 2.3.1 Formulation matricielle et fonctions à deux points

De façon à retrouver le modèle  $O(2)$  dynamique comme cas particulier, nous réécrivons la dynamique complexe (2.1) en termes de vecteurs réels à deux composantes. Nous introduisons donc les parties réelle et imaginaire  $\psi_1$  et  $\psi_2$  du champ  $Z$  :  $Z \equiv \psi_1 + i\psi_2$ . En termes du champ  $\psi_\alpha$ , nous avons :

$$\partial_t \psi_\alpha = -R_{\alpha\beta} \psi_\beta - U_{\alpha\beta} \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\gamma + f_\alpha + \eta_\alpha \quad (2.11)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des indices pouvant prendre les valeurs 1 et 2. Il y a sommation implicite sur les indices répétés.  $R_{\alpha\beta}$  est un opérateur matriciel donné par :

$$R_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} r - c\Delta & -(\omega_0 - c_a\Delta) \\ \omega_0 - c_a\Delta & r - c\Delta \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.  $U_{\alpha\beta}$  est la matrice :

$$U_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} u & -u_a \\ u_a & u \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Le bruit vectoriel  $\eta_\alpha$  est un bruit blanc gaussien de premier moment zéro, et possède le corrélateur suivant :

$$\langle \eta_\alpha(\mathbf{x}, t) \eta_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \delta_{\alpha\beta} \quad (2.14)$$

Les fonctions de corrélation et de réponse sont maintenant des matrices de taille 2 et s'écrivent :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= C_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \equiv \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \psi_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle_c \\ &\equiv \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \psi_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle - \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle \langle \psi_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') &= \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \equiv \left. \frac{\delta \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle}{\delta f_\beta(\mathbf{x}', t')} \right|_{f=0}\end{aligned}\quad (2.15)$$

L'invariance de phase de la dynamique écrite en termes des champs complexes devient la symétrie rotationnelle  $O(2)$ . Elle impose aux fonctions de corrélation et de réponse de commuter avec les rotations, ce qui nous donne les relations suivantes :

$$\tilde{C}_{11} = \tilde{C}_{22} \quad \tilde{C}_{21} = -\tilde{C}_{12} \quad (2.16)$$

ainsi que les relations analogues pour  $\tilde{\chi}_{\alpha\beta}$ . Les fonctions physiques définies en (2.7) peuvent être obtenues à partir de la relation (2.10), et nous avons :

$$\begin{aligned}C(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &\simeq C_{11}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \\ \chi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &\simeq \chi_{11}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \frac{\cos \theta}{\Lambda} + \chi_{12}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \frac{\sin \theta}{\Lambda}\end{aligned}\quad (2.17)$$

### 2.3.2 Fonctionnelle génératrice

Le formalisme de Janssen-De Dominicis [73, 26] nous permet d'écrire une fonctionnelle génératrice pour la théorie dynamique<sup>1</sup>, qui a une structure semblable à celle de l'action d'une théorie statique avec un potentiel en  $\phi^4$  [93, 2, 91]. Nous présentons dans l'annexe D le détail de ce calcul. Son principe repose sur l'introduction d'un champ auxiliaire  $\tilde{\psi}_\alpha$  à deux composantes, dont l'intégration fonctionnelle se fait sur l'axe imaginaire. Nous pouvons alors appliquer les règles de calcul perturbatif usuelles, et en particulier le théorème de Wick pour le calcul des fonctions de corrélations avec un poids gaussien. La fonctionnelle génératrice de Janssen-De Dominicis pour notre théorie s'écrit :

$$Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha] = \int \mathcal{D}[\psi_\alpha] \mathcal{D}[-i\tilde{\psi}_\alpha] \exp \left\{ \mathcal{S}[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] + \int d^d x dt [\tilde{J}_\alpha \tilde{\psi}_\alpha + J_\alpha \psi_\alpha] \right\} \quad (2.18)$$

où l'action  $\mathcal{S}$  se décompose en une partie quadratique, dite "libre", et une partie quartique, dite "d'interaction" :  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_{\text{int}}$ . On a les expressions suivantes :

$$\mathcal{S}_0[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] = \int d^d x dt \left\{ D \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\psi}_\alpha - \tilde{\psi}_\alpha [\partial_t \psi_\alpha + R_{\alpha\beta} \psi_\beta] \right\} \quad (2.19)$$

$$\mathcal{S}_{\text{int}}[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] = \int d^d x dt \left\{ -U_{\alpha\beta} \tilde{\psi}_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\gamma \right\} \quad (2.20)$$

Nous devons à ce stade insister sur le point suivant : nous savons qu'une intégration fonctionnelle n'est proprement définie que dans un formalisme discret,

<sup>1</sup>Une fonctionnelle génératrice est une fonctionnelle de un ou plusieurs champs (ici  $\tilde{J}_\alpha$  et  $J_\alpha$ ), dont les dérivées fonctionnelles sont égales aux fonctions de corrélation de la théorie.

et que son expression après passage à la limite continue dépend de la discrétisation qui a été choisie pour effectuer le calcul. Ce fait habituel est rappelé en détails dans l'annexe D, où nous montrons que l'écriture (2.18) suppose une définition particulière de la valeur en zéro de la fonction  $\theta$  de Heaviside, choisie en accord avec la discrétisation utilisée pour l'établissement de notre intégrale fonctionnelle. Toutefois, nous montrons que nous pouvons nous affranchir de revenir à une formulation discrète de l'intégrale fonctionnelle, à condition de choisir une valeur pour  $\theta(0)$  en accord avec l'écriture de l'action. Dans le choix que nous avons effectué pour écrire l'intégrale fonctionnelle (2.18), cette valeur doit être prise égale à zéro.

Dans le cadre de ce formalisme, les fonctions de corrélation à  $n$  points de la théorie sont données par les dérivées de la fonctionnelle  $Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha]$ , et les fonctions de corrélation connexes par les dérivées de la fonctionnelle  $\ln Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha]$  :

$$\begin{aligned}
 C_{\{\tilde{\psi}_{\alpha_i}\},\{\psi_{\beta_j}\}}(\{\mathbf{x}_i, t_i\}; \{\mathbf{x}'_j, t'_j\}) &= \langle \prod_{i,j} \tilde{\psi}_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i, t_i) \psi_{\beta_j}(\mathbf{x}'_j, t'_j) \rangle \\
 &= \prod_{i,j} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i, t_i)} \frac{\delta}{\delta J_{\beta_j}(\mathbf{x}'_j, t'_j)} Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha] \Big|_{J_\alpha, \tilde{J}_\alpha \equiv 0} \\
 C_{\{\tilde{\psi}_{\alpha_i}\},\{\psi_{\beta_j}\}}^c(\{\mathbf{x}_i, t_i\}; \{\mathbf{x}'_j, t'_j\}) &= \langle \prod_{i,j} \tilde{\psi}_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i, t_i) \psi_{\beta_j}(\mathbf{x}'_j, t'_j) \rangle_c \\
 &= \prod_{i,j} \frac{\delta}{\delta \tilde{J}_{\alpha_i}(\mathbf{x}_i, t_i)} \frac{\delta}{\delta J_{\beta_j}(\mathbf{x}'_j, t'_j)} \ln Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha] \Big|_{J_\alpha, \tilde{J}_\alpha \equiv 0}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Ces fonctions de réponse ont les propriétés habituelles suivantes :

L'invariance de phase de la théorie impose, entre autres, que l'action soit invariante par la transformation  $(\psi_\alpha \rightarrow -\psi_\alpha; \tilde{\psi}_\alpha \rightarrow -\tilde{\psi}_\alpha)$ . Ainsi les dérivées par rapport à un nombre impair de champs sont nulles.

Avec les conventions de l'annexe C, les termes du développement perturbatif des fonctions de corrélation de la théorie peuvent être représentés par les diagrammes de Feynman connectés de la théorie. Les termes perturbatifs associés aux fonctions de corrélation connexes correspondent quant à eux, aux diagrammes connexes de la théorie.

Il est alors établi perturbativement dans l'annexe D que la causalité de la théorie impose la propriété suivante pour les fonctions de réponse :

$$C^{(\tilde{N}, N), c} \equiv C_{\{\tilde{\psi}_{\alpha_i}\},\{\psi_{\beta_j}\}}^c(\{\mathbf{x}_i, t_i\}; \{\mathbf{x}'_j, t'_j\}) = 0 \quad \text{si} \quad \exists i, \forall j, \quad t_i > t'_j \tag{2.22}$$

En particulier,  $C^{(\tilde{N}, 0), c}$  est identiquement nulle.

Dans le formalisme de théorie des champs dynamique, le champ conjugué  $\tilde{J}_\alpha$  joue le rôle du champ externe  $f_\alpha$  de l'équation dynamique (2.11). Ainsi



les fonctions de corrélation qui contiennent des champs auxiliaires  $\tilde{\psi}_\alpha$ , et qui sont obtenues par dérivation par rapport au champ conjugué  $\tilde{J}_\alpha$ , représentent des fonctions de réponse de la théorie au champ  $f_\alpha$ . En particulier la fonction de réponse linéaire  $\chi_{\alpha\beta}$  définie en (2.15) apparaît comme un corrélateur de la théorie. Nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &= \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle_c \\
 &= \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle - \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle \langle \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{x}', t') \rangle \\
 &= \frac{\delta \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle}{\delta \tilde{J}_\beta(\mathbf{x}', t')} \Big|_{J_\alpha, \tilde{J}_\alpha \equiv 0} \\
 &= \frac{\delta^{(2)} \ln Z}{\delta J_\alpha(\mathbf{x}, t) \delta \tilde{J}_\beta(\mathbf{x}', t')} \Big|_{J_\alpha, \tilde{J}_\alpha \equiv 0}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

et

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &= \frac{\delta \psi_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\delta J_\beta(\mathbf{x}', t')} \Big|_{J_\alpha, \tilde{J}_\alpha \equiv 0} \\
 &= \frac{\delta^{(2)} \ln Z}{\delta J_\alpha(\mathbf{x}, t) \delta J_\beta(\mathbf{x}', t')} \Big|_{J_\alpha, J_\alpha \equiv 0}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

accompagnées de la relation (2.15). Enfin, en tenant compte des relations de causalité (2.22), nous pouvons écrire la matrice des corrélateurs à deux points de la théorie sous la forme :

$$\underline{\underline{C}}_{\alpha\beta}^{c,(2)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\chi}_{\beta\alpha}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}, t' - t) \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') & \tilde{C}_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

Grâce à l'invariance par translations spatiales et temporelles, le problème linéaire est diagonalisé dans l'espace de Fourier. Il nous sera donc très utile de travailler dans cet espace. Avec les notations de l'annexe A, notre fonctionnelle génératrice dans l'espace de Fourier s'écrit :

$$Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha] = \int \mathcal{D}[\psi_\alpha] \mathcal{D}[-i\tilde{\psi}_\alpha] \exp \left\{ \mathcal{S}[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] + \int_k [\tilde{J}_\alpha(k) \tilde{\psi}_\alpha(-k) + J_\alpha(k) \psi_\alpha(-k)] \right\} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] &= \int_k \left\{ D \tilde{\psi}_\alpha(k) \tilde{\psi}_\alpha(-k) - \tilde{\psi}_\alpha(k) [i\omega \delta_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}(-k)] \psi_\beta(-k) \right\} \\
 \mathcal{S}_{\text{int}}[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] &= - \int_{k_i} U_{\alpha\beta} \tilde{\psi}_\alpha(k_1) \psi_\beta(k_2) \psi_\gamma(k_3) \psi_\gamma(k_4) (2\pi)^{d+1} \delta^{(d+1)} \left( \sum_i k_i \right)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

où

$$R_{\alpha\beta}(k) = R_{\alpha\beta}(-k) = \begin{pmatrix} r + c\mathbf{q}^2 & -(\omega_0 + c_a \mathbf{q}^2) \\ \omega_0 + c_a \mathbf{q}^2 & r + c\mathbf{q}^2 \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

et  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{int}} + \mathcal{S}_0$ . En termes des transformées de Fourier  $\tilde{C}_{\alpha\beta}(k, k')$  et  $\tilde{\chi}_{\alpha\beta}(k, k')$  des fonctions  $\tilde{C}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  et  $\tilde{\chi}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$ , nous avons les relations sui-

vantes :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{\alpha\beta}(k, k') &= \langle \psi_\alpha(k) \psi_\beta(k') \rangle_c \\ &= \langle \psi_\alpha(k) \psi_\beta(k') \rangle - \langle \psi_\alpha(k) \rangle \langle \psi_\beta(k') \rangle \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta}(k, k') &= \frac{\delta \langle \psi_\alpha(k) \rangle}{\delta f_\beta(-k')} \Big|_{f=0}\end{aligned}\quad (2.29)$$

L'invariance par translation impose que ces fonctions soient proportionnelles à  $\delta^{(d+1)}(k + k')$ . Nous pouvons donc écrire :

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}^{c,(2)}(k, k') = \underline{\underline{C}}_{\alpha\beta}^{c,(2)}(k) (2\pi)^{d+1} \delta^{(d+1)}(k + k') \quad (2.30)$$

et la relation qui s'en suit avec des notations cohérentes pour  $\tilde{C}_{\alpha\beta}(k, k')$  et  $\tilde{\chi}_{\alpha\beta}(k, k')$ .

### 2.3.3 Action effective

Nous sommes également intéressés par la transformée de Legendre de la fonctionnelle  $\ln Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha]$ , traditionnellement notée  $\Gamma$ , et qui est une fonctionnelle des valeurs moyennes  $\Psi_\alpha$  et  $\tilde{\Psi}_\alpha$  des champs  $\psi_\alpha$  et  $\psi_\alpha$  respectivement :

$$\Gamma[\tilde{\Psi}_\alpha, \Psi_\alpha] = \int d^d x dt \left[ \tilde{J}_\alpha \tilde{\Psi}_\alpha + J_\alpha \Psi_\alpha \right] - \ln Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha] \quad (2.31)$$

Nous avons par définition :

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \ln Z}{\delta J_\alpha(\mathbf{x}, t)} \quad \tilde{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \ln Z}{\delta \tilde{J}_\alpha(\mathbf{x}, t)} \quad (2.32)$$

et la propriété suivante :

$$J_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \Gamma}{\delta \Psi_\alpha(\mathbf{x}, t)} \quad \tilde{J}_\alpha(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\Psi}_\alpha(\mathbf{x}, t)} \quad (2.33)$$

La fonctionnelle  $\Gamma[\tilde{\Psi}_\alpha, \Psi_\alpha]$  caractérise le comportement effectif du système après intégration sur les fluctuations. En particulier, ses dérivées fonctionnelles par rapport aux champs  $\Psi_\alpha$  et  $\tilde{\Psi}_\alpha$  peuvent être interprétées comme des paramètres effectifs de la théorie dans l'espace de Fourier. Cette fonctionnelle pourra donc prendre le nom d'"action effective" de la théorie. Les termes de la série perturbative des dérivées fonctionnelles que nous avons mentionnées sont appelés "vertex propres" de la théorie. Avec les conventions de l'annexe C, ces termes peuvent être représentés graphiquement par les diagrammes 1-particule irréductibles de la théorie, auxquels on a retranché les propagateurs externes [2, 91]. Ces fonctions sont données dans l'espace de Fourier par :

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}_i \beta_j}^{(\tilde{N}, N)}(k_i, k_j) = \frac{\delta^{(\tilde{N}+N)} \Gamma}{\delta \tilde{\Psi}_{\alpha_1}(-k_1) \dots \delta \tilde{\Psi}_{\alpha_{\tilde{N}}}(-k_{\tilde{N}}) \delta \Psi_{\beta_1}(-k_{\tilde{N}+1}) \dots \delta \Psi_{\beta_N}(-k_{\tilde{N}+N})} \Big|_{\Psi_\alpha, \tilde{\Psi}_\alpha \equiv 0} \quad (2.34)$$

où l'indice  $i$  (resp.  $j$ ) varie entre 1 et  $\tilde{N}$  (resp. entre  $\tilde{N}+1$  et  $\tilde{N}+N$ ). Il faut noter qu'à cause de l'invariance par translations spatiale et temporelle de la théorie, les dérivées de la fonctionnelle  $\Gamma$  sont des opérateurs scalaires. En particulier, ce sont des fonctions des moments  $k_i$  et  $k_j$  uniquement. Une autre conséquence de l'invariance par translations est que ces dérivées sont proportionnelles à la distribution de Dirac  $\delta\left(\sum_i k_i + \sum_j k_j\right)$ .

L'invariance par rotation de la théorie nous assure que les dérivées par rapport à un nombre impair de champs sont nulles, et nous donne l'identité suivante :

$$\int d^d x \int dt \left[ -\frac{\delta\Gamma}{\delta\Psi_1} \Psi_2 + \frac{\delta\Gamma}{\delta\Psi_2} \Psi_1 - \frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde{\Psi}_1} \tilde{\Psi}_2 + \frac{\delta\Gamma}{\delta\tilde{\Psi}_2} \tilde{\Psi}_1 \right] = 0 \quad (2.35)$$

dont les dérivées mènent aux identités de Ward-Takahashi pour notre théorie [2, 150].

On peut démontrer que la matrice  $\underline{\tilde{\Gamma}}^{(2)}$ , définie par :

$$\underline{\tilde{\Gamma}}_{\alpha\beta}^{(2)} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2)} & \tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)} \\ \tilde{\Gamma}_{\alpha\tilde{\beta}}^{(2)} & \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

où la dépendance en  $(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  est implicite, est donnée par l'inverse de la matrice  $\underline{\tilde{C}}^{c,(2)}$ , si bien qu'on a la propriété suivante :

$$\int d^d x' dt' \sum_{\gamma} \underline{\tilde{\Gamma}}_{\alpha\gamma}^{(2)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') \times \underline{\tilde{C}}_{\gamma\beta}^{c,(2)}(\mathbf{x}', t', \mathbf{x}'', t'') = \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta(t - t'') \delta_{\alpha\beta} \quad (2.37)$$

Dans l'espace de Fourier, l'invariance par translation nous assure la relation suivante, analogue à (2.30) :

$$\underline{\tilde{\Gamma}}_{\alpha\beta}^{(2)}(k, k') = \underline{\tilde{\Gamma}}_{\alpha\beta}^{(2)}(k) (2\pi)^{d+1} \delta^{d+1}(k + k') \quad (2.38)$$

et nous avons la propriété :

$$\underline{\tilde{\Gamma}}^{(2)}(k) = \left[ \underline{\tilde{C}}^{c,(2)}(k) \right]^{-1} \quad (2.39)$$

La causalité de la théorie impose la propriété suivante :

$$\Gamma^{(\tilde{N}, N)} \equiv \Gamma_{\tilde{\alpha}_i \beta_j}(\{\mathbf{x}_i, t_i\}; \{\mathbf{x}'_j, t'_j\}) \equiv 0 \quad \text{si} \quad \exists j, \forall i, \quad t'_j > t_i \quad (2.40)$$

que l'on peut démontrer ou bien à partir de la relation (2.22) et des relations dérivées de (2.37) sur les fonctions de corrélation d'ordre supérieur, ou bien perturbativement en termes de représentation sous forme diagrammatique (voir l'annexe D). En particulier,  $\Gamma^{(\tilde{N}=0, N)}$  est identiquement nulle. L'élément  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  de l'expression (2.36) est donc nul.

## 2.4 Elimination de la fréquence $\omega_0$

Dans le cas particulier où les paramètres  $\omega_0$ ,  $c_a$  et  $u_a$  de notre équation dynamique (2.1) sont nuls, notre dynamique est une dynamique relaxationnelle. Il s'agit en réalité exactement de la version dynamique du modèle  $O(n)$ , écrite en termes du modèle  $A$  de la classification de Hohenberg et Halperin [61], et dans le cas particulier  $n = 2$  (paramètre d'ordre à deux composantes avec une symétrie rotationnelle). Dans ce cas particulier, l'action de la théorie des champs associée est invariante par renversement temporel et cette symétrie impose les relations de bilan détaillé et le théorème Fluctuation-Dissipation [18, 129]. Nous reviendrons dans cette section sur cette propriété propre aux dynamiques proches de l'équilibre thermique, et nous dériverons une version généralisée de la relation Fluctuation-Dissipation dans un cas particulier de l'instabilité oscillante.

Dans le cas général, notre théorie ne possède pas cette symétrie, et il lui correspond donc un groupe de symétries qui est un sous-groupe strict de celui du modèle  $O(2)$ . En ce sens notre modèle est une généralisation stricte du modèle  $O(2)$ , exhibant *a priori* de nouvelles classes d'universalité. Nous allons voir toutefois que, dans un cas particulier du choix du jeu paramètres intervenant dans l'équation dynamique (2.1), il existe une analogie exacte entre notre dynamique et la dynamique relaxationnelle du modèle  $O(2)$ . Pour cela, nous utiliserons l'opération de transformation sur les champs présentée dans la sous-section suivante.

### 2.4.1 Référentiel oscillant

Nous pouvons placer la théorie dans un référentiel oscillant à la pulsation  $\omega_0$ . Dans ce référentiel, la dynamique se réécrit en termes d'un nouveau champ, que nous noterons  $U$ , et dont la théorie possède un paramètre de moins que celle qui est associée au champ  $Z$ . En effet, avec la définition  $U = Z \exp(i\omega_0 t)$ , nous obtenons la dynamique suivante :

$$\partial_t U = -rU + (c + ic_a)\Delta U - (u + iu_a)|U|^2 U + g + \zeta \quad (2.41)$$

où les variables associées au bruit et à la force externe sont :  $\zeta = e^{i\omega_0 t} \eta$ ,  $g = e^{i\omega_0 t} f$ . En particulier, le bruit  $\zeta$  possède les mêmes corrélateurs que  $\eta$ . Nous pouvons, comme précédemment, décomposer le champ  $U$  en ses parties réelles et imaginaires et écrire une fonctionnelle génératrice dans un formalisme matriciel. La décomposition  $U = \varphi_1 + i\varphi_2$  mène à :

$$Z_U[\tilde{H}_\alpha, H_\alpha] = \int \mathcal{D}[\varphi_\alpha] \mathcal{D}[-i\tilde{\varphi}_\alpha] \exp \left\{ \mathcal{S}_U[\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha] + \int d^d x \int dt [\tilde{H}_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha + H_\alpha \varphi_\alpha] \right\} \quad (2.42)$$

où  $\mathcal{S}_U$  est l'analogie de l'action  $\mathcal{S}$  associée au champ  $Z$ , sans le paramètre  $\omega_0$ . Nous avons la propriété suivante :

$$\varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) = \Omega_{\alpha\beta}(\omega_0 t) \psi_\beta(\mathbf{x}, t) \quad (2.43)$$

où

$$\Omega_{\alpha\beta}(\omega_0 t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

et les relations analogues pour les champs  $\tilde{\varphi}_\alpha$ ,  $\zeta_\alpha$  et  $g_\alpha$ . Notons  $G_{\alpha\beta}$  et  $\gamma_{\alpha\beta}$  les fonctions de corrélation et de réponse de la théorie associée au champ  $U$ , et définies par des relations analogues à (2.15). Leur étude nous permet de connaître les fonctions qui nous intéressent grâce aux lois de transformation suivantes :

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &= \Omega_{\alpha\sigma}(-\omega_0(t - t')) G_{\sigma\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \\ \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') &= \Omega_{\alpha\sigma}(-\omega_0(t - t')) \gamma_{\sigma\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dans l'espace de Fourier, ces relations s'écrivent :

$$\begin{aligned} C_{11}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{2} \left[ G_{11}(\mathbf{q}, \omega + \omega_0) + G_{11}(\mathbf{q}, \omega - \omega_0) + i(G_{12}(\mathbf{q}, \omega + \omega_0) - G_{12}(\mathbf{q}, \omega - \omega_0)) \right] \\ C_{12}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{2} \left[ G_{12}(\mathbf{q}, \omega + \omega_0) + G_{12}(\mathbf{q}, \omega - \omega_0) - i(G_{11}(\mathbf{q}, \omega + \omega_0) - G_{11}(\mathbf{q}, \omega - \omega_0)) \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

et nous avons des relations analogues pour les fonctions de réponse.

Les propriétés concernant les fonctions de corrélation et de réponse et qui ont été dérivées dans la section 2.3 dans le cadre de la théorie associée au champ  $Z$  se retrouvent de façon analogue pour les fonctions  $G$  et  $\gamma$  associée au champ  $U$ , puisque ces propriétés ne dépendaient pas de la valeur du paramètre  $\omega_0$ .

### 2.4.2 Analogie exacte avec un problème thermodynamique

Dans le cas particulier où les coefficients  $c_a$  et  $u_a$  sont nuls, la dynamique écrite en termes du champ  $U$  présenté ci-dessus est une dynamique relaxationale, c'est à dire qu'il existe un potentiel thermodynamique pour ce champ. La dynamique pour le champ  $U$  est alors donnée par la dérivation fonctionnelle d'une forme définie positive qui peut-être interprétée comme une énergie libre. Nous avons :

$$\partial_t U = -rU + c\Delta U - u|U|^2 U + g + \zeta = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta U^*} + g + \zeta \quad (2.47)$$

où  $\mathcal{F}$  est le potentiel suivant :

$$\mathcal{F}[U, U^*] = \int d^d x \int dt \left\{ r|U|^2 + c|\nabla U|^2 + \frac{1}{2}u|U|^4 \right\} \quad (2.48)$$

En absence de bruit et de force externe, la relaxation se traduit par le fait que la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  est décroissante en fonction du temps ( $d\mathcal{F}/dt \leq 0$ ), et les équilibres stables sont donnés par les minima de  $\mathcal{F}$ . Dans le cas bruité, la distribution de probabilité des états du système relaxe vers la distribution d'équilibre de Lyapunov donnée par :

$$\begin{aligned} P_{\text{eq}}[U, U^*] &= Z_{\text{eq}}^{-1} \exp \left\{ -\frac{\mathcal{F}[U, U^*]}{D} \right\} \\ \text{où} \\ Z_{\text{eq}} &= \int \mathcal{D}[U] \mathcal{D}[U^*] \exp \left\{ -\frac{\mathcal{F}[U, U^*]}{D} \right\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

La dynamique écrite sous forme matricielle est alors une dynamique hamiltonienne, et nous retrouvons le hamiltonien du modèle  $O(n)$  dans le cas particulier  $n = 2$  :

$$\begin{aligned}\partial_t \varphi_\alpha &= -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_\alpha} + \zeta_\alpha \\ \mathcal{H}[\varphi_\alpha] &= \int d^d x \left\{ \frac{r}{2} \varphi^2 + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{u}{4} |\varphi|^4 \right\} \\ \varphi^2 &\equiv \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_\alpha^2 \quad ; \quad \varphi^4 \equiv (\varphi^2)^2 \quad ; \quad |\nabla \varphi|^2 \equiv \sum_{\alpha=1}^2 (\nabla \varphi_\alpha)^2\end{aligned}\quad (2.50)$$

Le système relaxe alors vers la distribution d'équilibre de Boltzmann :

$$\begin{aligned}P_{\text{eq}}[\varphi_\alpha] &= Z_{\text{eq}}^{-1} \exp \left\{ -\frac{\mathcal{H}[\varphi_\alpha]}{D} \right\} \\ Z_{\text{eq}} &= \int \mathcal{D}[\varphi_\alpha] \exp \left\{ -\frac{\mathcal{H}[\varphi_\alpha]}{D} \right\}\end{aligned}\quad (2.51)$$

### 2.4.3 Théorème Fluctuation-Dissipation généralisé

Toujours dans le cas particulier où les paramètres  $c_a$  et  $u_a$  de notre équation dynamique (2.1) sont nuls, l'action décrivant la dynamique du champ  $U$  est invariante par renversement temporel, et nous pouvons écrire les relations de bilan détaillé [129]. Elles relient les probabilités d'évolution le long d'un chemin donné et de son renversé temporel :

$$W \left[ \varphi_\alpha^i \rightarrow \varphi_\alpha^f; t_f - t_i \right] = e^{-[\mathcal{H}[\varphi_\alpha^f] - \mathcal{H}[\varphi_\alpha^i]]/D} W^T \left[ \varphi_\alpha^f \rightarrow \varphi_\alpha^i; t_f - t_i \right] \quad (2.52)$$

où  $W[\varphi_\alpha^i \rightarrow \varphi_\alpha^f; t_f - t_i]$  représente l'amplitude de probabilité d'aller de la configuration  $\varphi_\alpha^i$  à la configuration  $\varphi_\alpha^f$  pendant l'intervalle de temps  $t_f - t_i$ , et  $W^T[\varphi_\alpha^f \rightarrow \varphi_\alpha^i; t_f - t_i]$  l'amplitude de probabilité d'effectuer l'opération inverse, calculée avec l'action renversée temporellement. Cette symétrie détaillée de la réalisation des différents amplitudes de probabilité d'aller d'une configuration à une autre permet de déduire le théorème Fluctuation-Dissipation. Ce théorème affirme que, dans le cas des dynamiques qui dérivent de l'équilibre, il existe une relation entre les fonctions de corrélation et de réponse à deux points de la théorie<sup>2</sup>. Dans le cas particulier qui nous intéresse, les fonctions  $G_{\alpha\beta}$  et  $\gamma_{\alpha\beta}$  sont des matrices diagonales et nous pouvons écrire :

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, t) \delta_{\alpha\beta} \quad \gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) \delta_{\alpha\beta} \quad (2.53)$$

La relation Fluctuation-Dissipation s'écrit :

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = -\frac{\theta(t)}{D} \frac{\partial}{\partial t} G(\mathbf{x}, t) \quad (2.54)$$

<sup>2</sup>Des relations reliant des fonctions de corrélation d'ordre supérieur peuvent aussi être dérivées. Voir par exemple [120].

Dans l'espace de Fourier, si on note  $\gamma'$  et  $\gamma''$  respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction  $\gamma$ , la relation s'écrit :

$$\gamma''(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\omega}{2D} G(\mathbf{q}, \omega) \quad (2.55)$$

et

$$\gamma'(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{D} \mathcal{P} \int_{\omega'} \frac{\omega'}{\omega' - \omega} G(\mathbf{q}, \omega') \quad (2.56)$$

où  $\mathcal{P}$  désigne la valeur principale de l'intégrale au sens des distributions<sup>3</sup>.

Dans le cas des transitions de phase d'équilibre, la relation (2.54) permet, connaissant l'une des deux fonctions à deux points, de dériver l'autre. Ces deux fonctions sont en quelque sorte *les mêmes*. Hors équilibre, nous ne possédons pas de telle relation, et les deux fonctions à deux points sont réellement indépendantes. Toutefois, dans le cas particulier que nous regardons, les lois de transformation (2.46) nous permettent d'exploiter la symétrie qui existe dans la théorie associée au champ  $U$  pour déduire une relation généralisée de la relation Fluctuation-Dissipation en termes de la théorie associée au champ  $Z$ . Cette relation ayant été établie, il est préférable de l'écrire en termes des fonctions de corrélation et de réponse (2.17), qui sont directement les observables physiques. Pour cela, nous introduisons la fonction de réponse  $(\chi_{ZF})_{\alpha\beta}$  du champ  $Z$  à la force physique  $F$ . Les fonctions de corrélation et de réponse (2.17) sont alors directement données par les éléments diagonaux de cette matrice. Nous avons :

$$(\chi_{ZF})_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{1}{\Lambda} \Omega_{\alpha\sigma} (\theta - \omega_0(t - t')) \gamma_{\sigma\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \quad (2.57)$$

La présence de la fréquence  $\omega_0$  et de la phase  $\theta$  transforme la relation (2.55) en :

$$\begin{aligned} \cos \theta (\chi''_{ZF})_{11}(k) + \sin \theta (\chi''_{ZF})_{12}(k) &= \frac{1}{2\Lambda D} (\omega C_{11}(k) + i\omega_0 C_{12}(k)) \\ \cos \theta (\chi'_{ZF})_{12}(k) - \sin \theta (\chi'_{ZF})_{11}(k) &= \frac{1}{2\Lambda D} (\omega_0 C_{11}(k) + i\omega C_{12}(k)) \end{aligned} \quad (2.58)$$

que nous appellerons "relation Fluctuation-Dissipation généralisée". D'autre part, nous rappelons les relations de Kramers-Krönig qui traduisent la causalité de la théorie :

$$\begin{aligned} \chi'(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\chi''(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \chi''(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\chi'(\omega')}{\omega' - \omega} \end{aligned} \quad (2.59)$$

La relation (2.58), ajoutée de la propriété de symétrie (2.16), valable pour la fonction  $(\chi_{ZF})_{\alpha\beta}$ , et des relations de Kramers-Krönig, permet, bien que notre dynamique soit hors équilibre, et si l'on connaît la pulsation  $\omega_0$  et la phase  $\theta$ , de calculer l'une des deux fonctions à deux points lorsque nous connaissons l'autre.

<sup>3</sup> Cette relation peut également être retrouvée à l'aide des relations de Kramers-Krönig liées à la causalité.

Insistons toutefois sur deux aspects qui sont absents du problème à l'équilibre. Tout d'abord, la relation (2.58) fait intervenir la fréquence  $\omega_0$  et la phase  $\theta$ ; or cette dernière n'apparaît que dans la fonction de réponse. La connaissance de la fonction de corrélation ne permet donc pas une dérivation complète de la fonction de réponse. D'autre part, les fonctions (2.17) ne font intervenir que les parties diagonales des fonctions générales. Il nous faut donc, dans le cas général, une autre mesure que celle de la réponse du champ physique  $X$  pour déterminer les corrélations.



## Chapitre 3

# Théorie champ moyen d'oscillateurs couplés dans le régime critique

Dans ce chapitre, nous étudions le comportement critique de notre théorie dans le cadre de la théorie champ moyen. Cette théorie est dérivée à partir de notre formalisme à l'aide de l'approximation de Landau, qui consiste à remplacer l'intégrale fonctionnelle (2.18) par sa valeur au col (encore appelé point selle), défini comme le chemin pour lequel l'action est stationnaire (voir par exemple [91]). La condition de stationnarité nous donne des équations d'évolution pour les valeurs des champs le long de ce chemin. Ces équations nous permettent de calculer les fonctions de corrélation et de réponse de la théorie dans le cadre de cette approximation et d'en déduire les exposants critiques en champ moyen. Cette condition de stationnarité peut être dérivée à partir de deux écritures différentes de l'intégrale de chemins (2.18). Nous établissons la cohérence des deux méthodes. Nous calculons l'action effective de la théorie dans le cadre de cette approximation, et montrons que l'approximation de Landau correspond à l'approximation à l'ordre des "arbres" de la théorie. Dans la section 3.3, nous caractérisons la transition décrite par la théorie champ moyen et nous déduisons les lois d'échelle associées. Enfin, dans la section 3.4, et à l'aide d'arguments très similaires à ceux qui sont connus pour le modèle  $O(2)$ , nous montrons que l'approximation de Landau est insuffisante en dimension d'espace inférieure à 4, et soulignons le rôle critique de la dimension 2.

### 3.1 Approximation de Landau

Partant de la fonctionnelle génératrice (2.18), nous pouvons effectuer l'intégrale sur le champ auxiliaire  $\tilde{\psi}_\alpha$ , en termes duquel notre intégrale est gaussienne. Nous obtenons alors l'expression suivante :

$$Z[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha] = \int \mathcal{D}[\psi_\alpha] \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int d^d x dt \left( \partial_t \psi_\alpha - F_\alpha[\psi] - \tilde{J}_\alpha \right)^2 + \int d^d x dt J_\alpha \psi_\alpha \right\} \quad (3.1)$$

où  $F_\alpha[\psi]$  est la fonctionnelle :

$$F_\alpha[\psi] = -R_{\alpha\beta}\psi_\beta - U_{\alpha\beta}\psi_\beta\psi_\gamma\psi_\gamma \quad (3.2)$$

### 3.1.1 Point selle de la théorie

Nous appelons  $\psi_\alpha^L(\mathbf{x}, t)$  le chemin pour lequel l'action contenue dans la fonctionnelle génératrice (3.1) est stationnaire. La condition de stationnarité s'écrit :

$$\begin{aligned} & [-\partial_t\delta_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha} + U_{\beta\alpha}\psi_\gamma^L\psi_\gamma^L + 2U_{\beta\sigma}\psi_\sigma^L\psi_\alpha^L] \cdot \\ & \cdot \left[ \partial_t\psi_\beta^L + R_{\beta\sigma}\psi_\sigma^L + U_{\beta\sigma}\psi_\sigma^L\psi_\gamma^L\psi_\gamma^L - \tilde{J}_\beta \right] = 2DJ_\alpha \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cette équation nous donne une fonction implicite  $\psi_\alpha^L[\tilde{J}_\beta, J_\beta]$ , et la fonctionnelle génératrice en champ moyen est donnée par :

$$Z^L[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha] = \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int d^d x dt \left( \partial_t\psi_\alpha^L - F_\alpha[\psi^L] - \tilde{J}_\alpha \right)^2 + \int d^d x dt J_\alpha\psi_\alpha^L \right\} \quad (3.4)$$

où  $\psi_\alpha^L$  est évalué en  $(\tilde{J}_\beta, J_\beta)$ . Dans le cadre de cette approximation, nous avons :

$$\langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle^L \equiv \frac{\delta \ln Z^L}{\delta J_\alpha(\mathbf{x}, t)} = \psi_\alpha^L(\mathbf{x}, t) = \Psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \quad (3.5)$$

(voir les équations (2.32)). Ces mêmes équations nous donnent les solutions implicites  $J_\alpha[\tilde{\Psi}_\beta, \Psi_\beta]$  et  $\tilde{J}_\alpha[\tilde{\Psi}_\beta, \Psi_\beta]$ , et le calcul mène à l'expression suivante pour l'action effective dans le cadre de l'approximation de Landau :

$$\Gamma^L[\tilde{\Psi}_\alpha, \Psi_\alpha] = \int d^d x dt \left\{ -D\tilde{\Psi}_\alpha\tilde{\Psi}_\alpha + \tilde{\Psi}_\alpha [\partial_t\Psi_\alpha + R_{\alpha\beta}\Psi_\beta + U_{\alpha\beta}\Psi_\beta\Psi_\gamma\Psi_\gamma] \right\} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Approximation à l'ordre des arbres

Comme il est usuellement le cas pour de nombreuses théories des champs, l'approximation de Landau correspond également, dans un développement perturbatif en termes de diagrammes de Feynman, à l'approximation à l'ordre des arbres de la théorie. En effet, nous verrons dans la section 3.2 que nous retrouvons, pour les fonctions de corrélation et de réponse calculées en champ moyen, les expressions (C.6), qui sont dérivées dans l'annexe C, et qui sont associées aux propagateurs libres de la théorie et aux représentations graphiques (C.7) et (C.8). Au niveau de ces fonctions, l'approximation de Landau correspond donc bien à l'approximation en arbres.

De façon à établir la même propriété pour la fonctionnelle  $\Gamma$ , considérons tout d'abord  $\underline{\underline{\Gamma}}^{(2)}$ . Dans le cadre de l'approximation de Landau, cette matrice est égale à la matrice  $\underline{\underline{A}}(k)$  de l'annexe C (équation (C.3)), et est donc bien l'inverse de l'approximation à l'ordre des arbres de la matrice  $\underline{\underline{C}}^{(2)}$ , et qui donnée par les fonctions de corrélation et de réponse de la théorie champ moyen.

$\Gamma_L^{(4)}$ , quant à lui, est donné par :

$$\Gamma_L^{(4)}_{\tilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 2[U_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\beta_3\beta_4} + U_{\alpha_1\beta_3}\delta_{\beta_2\beta_4} + U_{\alpha_1\beta_4}\delta_{\beta_2\beta_3}] \times (2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (3.7)$$

ce qui correspond bien au développement diagrammatique suivant :

$$\Gamma_L^{(4)}_{\tilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = - \left[ \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad / \\ \bullet \\ / \quad \diagdown \\ 3 \quad 4 \end{array} & + & \begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad / \\ \bullet \\ / \quad \diagdown \\ 2 \quad 4 \end{array} & + & \begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad / \\ \bullet \\ / \quad \diagdown \\ 2 \quad 3 \end{array} \end{array} \right] \times (2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (3.8)$$

Dans l'expression ci-dessus, nous avons noté 1 le couple  $(\alpha_1, k_1)$ , et  $i$  le couple  $(\beta_i, k_i)$ ; chaque diagramme est affecté du facteur de symétrie 2. On remarquera que l'on a :

$$\begin{aligned} \Gamma_L^{(4)}_{\tilde{1}111}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= 6u(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ \Gamma_L^{(4)}_{\tilde{2}111}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= 6u_a(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (3.9)$$

et que les autres termes du tenseur se déduisent par symétrie.

Les dérivées d'ordre supérieur de la fonctionnelle  $\Gamma$  sont toutes nulles.

### 3.1.3 Deuxième point de vue

Comme nous l'avons signalé, nous pouvons aussi effectuer le calcul de l'approximation de Landau en partant de la formulation (2.18) de la théorie. Dans ce cas, la condition de stationnarité de l'action  $\mathcal{S}$  doit être écrite par rapport aux deux champs  $\tilde{\psi}_\alpha$  et  $\psi_\alpha$  :

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\tilde{\psi}_\alpha} \equiv 0 \quad \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\psi_\alpha} \equiv 0 \quad (3.10)$$

Ces deux conditions mènent aux jeux d'équations suivant :

$$\begin{aligned} -\partial_t\tilde{\psi}_\alpha^L + R_{\beta\alpha}\tilde{\psi}_\beta^L + U_{\beta\alpha}\tilde{\psi}_\beta^L\psi_\gamma^L\psi_\gamma^L + 2U_{\beta\sigma}\psi_\sigma^L\psi_\alpha^L\tilde{\psi}_\beta^L &= J_\alpha \\ -2D\tilde{\psi}_\alpha^L + [\partial_t\psi_\alpha^L + R_{\alpha\beta}\psi_\beta^L + U_{\alpha\beta}\psi_\beta^L\psi_\gamma^L\psi_\gamma^L] &= \tilde{J}_\alpha \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vérifions la cohérence des deux méthodes. D'une part, l'élimination du champ auxiliaire  $\tilde{\psi}^L$ , qui n'a pas de signification physique, nous redonne l'équation (3.3). D'autre part, notre fonctionnelle génératrice s'écrit maintenant :

$$Z^L[\tilde{J}_\alpha, J_\alpha] = \exp \left\{ \mathcal{S}[\tilde{\psi}_\alpha^L, \psi_\alpha^L] + \int d^d x dt [\tilde{J}_\alpha\tilde{\psi}_\alpha^L + J_\alpha\psi_\alpha^L] \right\} \quad (3.12)$$

où nous pouvons exprimer  $\tilde{\psi}_\alpha^L[\tilde{J}_\beta, J_\beta]$  et  $\psi_\alpha^L[\tilde{J}_\beta, J_\beta]$  grâce aux équations (3.11) (plus exactement, nous sommes en possession d'une équation implicite pour ces grandeurs). L'élimination du champ  $\tilde{\psi}^L$  grâce aux équations (3.11) dans l'expression ci-dessus redonne l'expression (3.4). Il est immédiat de voir que l'on retrouve également la même expression pour la fonctionnelle  $\Gamma$ .

### 3.2 Fonctions de corrélation et de réponse

Plaçons-nous dans le cadre du premier point de vue. Dans le cas où le champ conjugué  $J_\alpha$  est nul, le col de la fonctionnelle (3.1) est donné par :

$$\partial_t \Psi_\alpha = -R_{\alpha\beta} \Psi_\beta - U_{\alpha\beta} \Psi_\beta \Psi_\gamma \Psi_\gamma + \tilde{J}_\alpha \quad (3.13)$$

qui correspond à la version déterministe de notre équation dynamique de départ, écrite en termes des valeurs moyennes des champs. La fonction de réponse  $\chi_{\alpha\beta}$  peut donc être calculée directement sur cette équation. En effet, nous rappelons que nous avons :

$$\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \frac{\delta \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle}{\delta \tilde{J}_\beta(\mathbf{x}', t')} \Big|_{J_\alpha, \tilde{J}_\alpha \equiv 0} \quad (3.14)$$

Dans la phase non oscillante, la valeur moyenne en l'absence de force externe est nulle. Ainsi  $\langle \psi_\alpha \rangle$  est linéaire en  $\tilde{J}_\beta$  à faible force, et les termes non linéaires n'interviennent pas dans le calcul de la fonction de réponse. Dans l'espace de Fourier nous obtenons :

$$\chi_{\alpha\beta}^L(k) = \chi_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -i\omega + R & \Omega_0 \\ -\Omega_0 & -i\omega + R \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

où

$$\begin{aligned} R &= r + c\mathbf{q}^2 \\ \Omega_0 &= \omega_0 + c_a \mathbf{q}^2 \\ \Delta &= (R - i\omega)^2 + \Omega_0^2 \end{aligned}$$

A la transition, c'est à dire pour une valeur zéro du paramètre  $r$ , et pour le mode critique ( $\mathbf{q} = \mathbf{0}, \omega = \omega_0$ ), la fonction de réponse linéaire est divergente. Proche du point critique, le champ n'est plus une fonction analytique de la force externe, et nous avons, en termes des variables complexes de l'équation (2.1), la loi suivante :

$$\delta \langle |Z(\mathbf{0}, \omega_0)| \rangle_L \propto |f|^{1/3} \quad (3.16)$$

La fonction de corrélation, quant à elle, peut être calculée à partir de l'expression suivante :

$$\tilde{C}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\delta \langle \psi_\alpha(\mathbf{x}, t) \rangle}{\delta \tilde{J}_\beta(\mathbf{x}', t')} \Big|_{J_\alpha, \tilde{J}_\alpha \equiv 0} \quad (3.17)$$

et de l'équation (3.3). Le même argument que celui déjà invoqué pour la fonction de réponse non permet de négliger les termes non linéaires, et nous obtenons, avec les mêmes notations :

$$C_{\alpha\beta}^L(k) = C_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2D}{|\Delta|^2} \begin{pmatrix} \omega^2 + \Omega_0^2 + R^2 & 2i\omega\Omega_0 \\ -2i\omega\Omega_0 & \omega^2 + \Omega_0^2 + R^2 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Nous pouvons maintenant donner l'expression finale des fonctions de corrélation et de réponse physiques (2.17) en champ moyen :

$$\begin{aligned} \chi^L(k) = \chi^L(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{i\theta}}{-i\Lambda(\omega - \Omega_0) + \Lambda R} + \frac{e^{-i\theta}}{-i\Lambda(\omega + \Omega_0) + \Lambda R} \right] \\ C^L(k) = C^L(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{D}{R^2 + (\omega - \Omega_0)^2} + \frac{D}{R^2 + (\omega + \Omega_0)^2} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les fonctions de corrélation et de réponse peuvent également être calculées dans le cadre du deuxième point de vue. En effet, nous avons vu d'une part que ce point de vue nous redonnait l'équation (3.3), à partir de laquelle nous calculions la fonction de corrélation. D'autre part, dans le système (3.11), nous pouvons imposer  $J_\alpha \equiv 0$ . Alors  $\tilde{\psi}_\alpha^L \equiv 0$  est solution, et nous retrouvons l'équation (3.13), qui permet de calculer la fonction de réponse linéaire, ainsi que la relation (3.16).

Remarquons enfin que ces fonctions à deux champs peuvent être retrouvées à partir du système (3.11) qui nous fournit simplement les fonctions  $J_\alpha[\tilde{\psi}_\beta^L, \psi_\beta^L]$  et  $\tilde{J}_\alpha[\tilde{\psi}_\beta^L, \psi_\beta^L]$ . Nous pouvons alors calculer la matrice jacobienne suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta \tilde{J}_\alpha}{\delta \tilde{\psi}_\beta^L} & \frac{\delta \tilde{J}_\alpha}{\delta \psi_\beta^L} \\ \frac{\delta J_\alpha}{\delta \tilde{\psi}_\beta^L} & \frac{\delta J_\alpha}{\delta \psi_\beta^L} \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

qui est en réalité un produit tensoriel de deux matrices  $2 \times 2$ . Son inverse nous fournit, entre autres, les fonctions que nous cherchons. L'intérêt de cette remarque est que nous pouvons ainsi calculer, en principe, les fonctions à deux champs à force non nulle<sup>1</sup>.

### 3.3 Bifurcation de Hopf

#### 3.3.1 Instabilité oscillante homogène

La théorie que nous venons d'exposer a toutes les propriétés souhaitées d'une théorie des champs, et décrit un système qui présente une transition de phase lorsque le paramètre  $r$  change de signe. L'équation dynamique (3.13), réécrite en termes des variables complexes, constitue exactement l'équation Ginzburg-Landau complexe. Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 1, le diagramme de phase de cette équation, du côté "oscillant" de la transition, est très riche ; il a été et est encore l'objet de nombreuses études [3]. Notre étude consiste à étudier le comportement critique du système lorsque l'on s'approche de la transition de phase du côté non-oscillant de la transition. En particulier, la complexité du diagramme de phase du côté oscillant de la bifurcation ne nous est pas directement accessible par notre étude, et pourrait différer du diagramme de phase connu en absence de bruit. Nous reviendrons sur cet aspect de notre étude dans le chapitre 7, paragraphe 7.2.4. Dans le paragraphe qui suit, nous nous intéressons à dégager les lois asymptotiques universelles qui existent lorsque le système est placé infiniment près du point de bifurcation et du côté non-oscillant de la bifurcation.

#### 3.3.2 Comportements asymptotiques et exposants critiques

Le comportement critique de la théorie n'est simplement visible que lorsque celle-ci est écrite dans le référentiel oscillant à la pulsation  $\omega_0$ , soit en termes du champ  $U$  qui a été défini dans le paragraphe 4.3.1. Les fonctions de corrélation

---

<sup>1</sup>Le champ conjugué  $J_\alpha$ , non physique, sera lui toujours pris égal à zéro pour évaluer des quantités physiques.

et de réponse à deux points  $G_{\alpha\beta}$  et  $\gamma_{\alpha\beta}$  associées au champ  $U$  sont données par des expressions semblables à (3.15) et (3.18), mais avec une valeur zéro du paramètre  $\omega_0$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\gamma_{\alpha\beta}^L(k) &= \gamma_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -i\omega + R & c_a \mathbf{q}^2 \\ -c_a \mathbf{q}^2 & -i\omega + R \end{pmatrix} \\ G_{\alpha\beta}^L(k) &= G_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2D}{|\Delta|^2} \begin{pmatrix} \omega^2 + (c_a \mathbf{q}^2)^2 + R^2 & 2i\omega c_a \mathbf{q}^2 \\ -2i\omega c_a \mathbf{q}^2 & \omega^2 + (c_a \mathbf{q}^2)^2 + R^2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Les fonctions de corrélation et de réponse homogènes et statiques sont données par :

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q} = \mathbf{0}, \omega = 0) &= \frac{2D}{r^2} \delta_{\alpha\beta} \\ \gamma_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q} = \mathbf{0}, \omega = 0) &= \frac{1}{r} \delta_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (3.22)$$

Ainsi, nous avons les lois d'échelles suivantes pour la partie diagonale de ces fonctions :

$$G_{11}^L(\mathbf{q} = \mathbf{0}, \omega = 0) \propto \frac{1}{r^2} \quad \gamma_{11}^L(\mathbf{q} = \mathbf{0}, \omega = 0) \propto \frac{1}{r} \quad (3.23)$$

Pour déterminer la longueur et le temps de corrélation du système, il est plus naturel de considérer ces fonctions dans l'espace direct. La transformée de Fourier sur la composante spatiale ne menant pas à des expressions simples, nous nous contenterons de l'expression dans l'espace  $(\mathbf{q}, t)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q}, t - t') &= D \Omega_{\alpha\beta} [-c_a \mathbf{q}^2 (t - t')] \frac{e^{-R|t-t'|}}{R} \\ \gamma_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q}, t - t') &= \theta(t - t') \Omega_{\alpha\beta} [-c_a \mathbf{q}^2 (t - t')] e^{-R(t-t')}\end{aligned}\quad (3.24)$$

La fonction de corrélation a un pôle en  $q = \pm i\sqrt{\frac{r}{c}}$ , et nous pouvons donc identifier  $\sqrt{\frac{r}{c}}$  avec la longueur de corrélation  $\xi$  du système. Le temps de corrélation associé au mode instable  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  à la transition est égal à  $1/R(\mathbf{q} = \mathbf{0}) = 1/r$ . Ainsi l'approche de la surface critique est-elle caractérisée par les lois d'échelle suivantes :

$$\xi \propto \frac{1}{r^{1/2}} \quad \tau \propto \xi^2 \quad (3.25)$$

Sur la surface critique  $r = 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q} = \mathbf{0}, \omega) &= \frac{2D}{\omega^2} \delta_{\alpha\beta} \propto \frac{1}{\omega^2} \\ \gamma_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q} = \mathbf{0}, \omega) &= \frac{i}{\omega} \delta_{\alpha\beta} \propto \frac{1}{\omega} \\ G_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q}, \omega = 0) &= \frac{2D}{(c^2 + c_a^2)(\mathbf{q}^2)^2} \delta_{\alpha\beta} \propto \frac{1}{q^4} \\ \gamma_{\alpha\beta}^L(\mathbf{q}, \omega = 0) &= \frac{1}{(c^2 + c_a^2)(\mathbf{q}^2)^2} \begin{pmatrix} c \mathbf{q}^2 & c_a \mathbf{q}^2 \\ -c_a \mathbf{q}^2 & c \mathbf{q}^2 \end{pmatrix} \propto \frac{1}{q^2}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Enfin l'expression (3.16) nous donne la loi d'échelle de la réponse non linéaire pour le mode critique à la transition. Ainsi le tableau des exposants critiques usuels est il complet.

En termes des fonctions physiques (2.17), les lois d'échelle sont les mêmes. En revanche, les modes divergents en fréquence correspondent à  $\omega = \pm\omega_0$ . Dans l'espace  $(\mathbf{q}, t)$ , nous avons les expressions :

$$\begin{aligned} C^L(\mathbf{q}, t - t') &= D \cos [-\Omega_0(t - t')] \frac{e^{-R|t-t'|}}{R} \\ \chi^L(\mathbf{q}, t - t') &= \frac{\theta(t - t')}{\Lambda} \cos [\theta - \Omega_0(t - t')] e^{-R(t-t')} \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.4 Validité de l'approximation de Landau et dimensions critiques

Dans cette section nous dérivons, dans le cadre de notre théorie, le critère de Ginzburg, qui teste la validité de l'approximation de Landau en effectuant l'intégration sur les fluctuations gaussiennes autour de la valeur au col de l'intégrale fonctionnelle.

Pour dériver la théorie champ moyen de notre problème, nous avons eu recours à l'approximation de Landau, ou approximation du col, qui néglige totalement la présence des fluctuations dans la théorie. Pour le moment, nous n'avons pas testé la validité de cette approximation. Pour le faire, nous pouvons faire un développement de l'action autour de sa valeur au col. La condition de stationnarité nous affirme que l'ordre linéaire de ce développement dans les perturbations est nul, et le premier ordre non nul est donc quadratique dans les champs. Si nous négligeons les ordres supérieurs, il nous faut alors évaluer une intégrale gaussienne, dont nous savons faire le calcul explicitement. Il est connu que ce calcul mène exactement à la correction à l'ordre une boucle de la théorie, et nous nous aiderons de la représentation graphique en termes de diagrammes de Feynman pour évaluer cette première correction à la théorie de Landau.

En termes de la théorie associée au champ  $U$ , le terme diagonal de la fonction de réponse pour le mode critique diverge à la transition. En champ moyen, la transition a lieu pour une valeur zéro du paramètre de contrôle  $r$ , et la divergence se produit avec une loi d'échelle en  $1/r$  (cf Eq. (3.23)). Ainsi les lois d'échelles prévues par cette théorie approximative sont brisées si l'inverse de ce terme, donné par  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2)}(\mathbf{0}, 0)$ , ne s'annule pas linéairement en  $r - r_c$  lorsque  $r$  tend vers sa valeur critique  $r_c$ . A l'ordre d'une boucle, et avec les conventions graphiques de l'annexe C, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2)(1)}(k) &= - \left[ \begin{array}{c} k' \\ \gamma \text{ loop} \\ \alpha \text{---} \beta \end{array} + \begin{array}{c} k' \\ \sigma \text{ loop} \\ \alpha \text{---} \beta \end{array} + \begin{array}{c} k' \\ \gamma \text{ loop} \\ \alpha \text{---} \beta \end{array} \right] \\
 &= -[(a) + (b) + (c)] \\
 &= - \left[ -U_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\sigma} \int_{k'} C_{\gamma\sigma}(k') - U_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma} \int_{k'} C_{\gamma\sigma}(k') - U_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\sigma} \int_{k'} C_{\gamma\sigma}(k') \right]
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

En tenant compte des expressions (C.10) pour les propagateurs libres, nous avons :

$$\begin{aligned}
 C_{12}(\mathbf{q}', t' = 0) &= -C_{21}(\mathbf{q}', t' = 0) = 0 \\
 C_{11}(\mathbf{q}', t' = 0) &= C_{22}(\mathbf{q}', t' = 0) = \frac{D}{r + c\mathbf{q}'^2}
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Ainsi les graphes (a) et (b) sont égaux entre eux et égaux à la moitié du graphe (c), et nous obtenons :

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2,1)}(k) = 4U_{\alpha\beta} \int_{\mathbf{q}'}^{\Lambda} C_{11}(\mathbf{q}', t' = 0) \tag{3.30}$$

Il faut noter que nous avons introduit une coupure  $\Lambda$  dans l'intégrale précédente portant sur l'espace des impulsions. Elle signifie que l'intégrale doit être effectuée sur la boule de rayon  $\Lambda$ . Cette coupure traduit le fait que la théorie physique microscopique est discrète et que la limite continue, prise sans précautions, est mal définie. Physiquement,  $\Lambda$  peut être vu comme le rayon de la première zone de Brillouin d'une théorie sur réseau de maille  $a \sim 2\pi/\Lambda$ . La présence de cette coupure sera discutée en détails dans le chapitre suivant. Elle est à l'origine de la technique de renormalisation de Wilson (voir chapitre 4). Nous avons :

$$\gamma_{11}(\mathbf{0}, 0)^{-1} = r + 4u \int_{\mathbf{q}}^{\Lambda} \frac{D}{r + c\mathbf{q}^2} + \mathcal{O}(u^2) \tag{3.31}$$

La condition critique  $\gamma_{11}(\mathbf{0}, 0)^{-1} = 0$  nous fournit l'équation implicite suivante :

$$r_c = -4u \int_{\mathbf{q}}^{\Lambda} \frac{D}{r_c + c\mathbf{q}^2} + \mathcal{O}(u^2) = -4u \int_{\mathbf{q}}^{\Lambda} \frac{D}{c\mathbf{q}^2} + \mathcal{O}(u^2) \tag{3.32}$$

la deuxième écriture étant tout aussi valable que la première à cet ordre en théorie des perturbations, car  $r_c$  est d'ordre  $u$ .

Pour  $d \leq 2$ , l'intégrale présente dans le membre de droite de l'équation (3.32) diverge. Ceci est une indication du fait que le point critique associé à notre théorie disparaît en dimension inférieure à deux. De façon générale, nous savons qu'un système physique décrit en termes d'un paramètre d'ordre à symétrie continue ne peut pas présenter d'ordre à longue distance en dimension



strictement inférieure à 2 [104, 129]. Cette dimension en-dessous de laquelle le système ne présente pas de transition de phase, est appelée “dimension critique inférieure”. Nous retrouvons ici la signature de cette propriété générale dans le cas particulier de notre théorie.

En dimension supérieure à 2, la valeur critique  $r_c$  du paramètre de contrôle  $r$  est négative, ce qui nous indique que la présence des fluctuations a détruit l'ordre à longue distance qui existait en champ moyen entre  $r = r_c$  et  $r = 0$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\gamma_{11}(\mathbf{0}, 0)^{-1} &= (r - r_c) - 4(r - r_c)u \int_{\mathbf{q}}^{\Lambda} \frac{D}{(r_c + c\mathbf{q}^2)(r + c\mathbf{q}^2)} + \mathcal{O}(u^2) \\ &= (r - r_c) - 4(r - r_c)u \int_{\mathbf{q}}^{\Lambda} \frac{D}{c\mathbf{q}^2(r - r_c + c\mathbf{q}^2)} + \mathcal{O}(u^2)\end{aligned}\tag{3.33}$$

Nous apercevons ici pour la première fois le rôle crucial de la dimension 4, appelée “dimension critique supérieure” de la théorie. Pour  $d > 4$ , l'intégrale présente dans l'équation (3.33) converge toujours. Ainsi  $\gamma_{11}(\mathbf{0}, 0)^{-1}$  s'annule linéairement en  $r - r_c$  au point critique, et les lois d'échelles prévues par la théorie champ moyen ne sont pas mises en défaut par ce calcul à l'ordre d'une boucle<sup>2</sup>. En revanche, la valeur critique du paramètre de contrôle, ainsi que les pré-facteurs des lois asymptotiques, sont modifiés par rapport aux expressions dérivées en champ moyen. Mais il s'agit là de quantités non-universelles qui dépendent des détails microscopiques de la théorie (comme par exemple de la coupure  $\Lambda$  présente dans nos intégrales).

En dimension inférieure à 4, en revanche, l'intégrale de l'équation (3.33) écrite sous sa deuxième forme présente une divergence lorsque  $r$  tend vers sa valeur critique  $r_c$ . Dans ce cas le terme perturbatif domine la loi d'échelle, ce qui invalide le calcul présenté ici. Pour prendre en compte correctement les fluctuations et trouver les lois d'échelle, il nous faut donc changer de méthode. C'est ce que nous faisons dans la suite de notre étude. Pour cela, nous utiliserons la théorie de la renormalisation, dont nous présentons la structure pour notre étude dans le chapitre suivant.

---

<sup>2</sup>Nous présenterons un argument plus général assurant la validité de la théorie champ moyen en dimension supérieure à 4 dans le chapitre suivant.



## Chapitre 4

# Groupe de renormalisation des oscillateurs couplés

Dans ce chapitre nous présentons la structure générale du groupe de renormalisation perturbatif de notre théorie. Nous présentons successivement les deux schémas de renormalisation que nous utiliserons dans les chapitres suivants à l'ordre d'une et deux boucles en théorie des perturbations, à savoir le schéma de renormalisation de Wilson, et celui de Callan-Symanzik. Pour chacun de ces schémas, nous commençons par en rappeler la structure générale dans les sections 4.1 et 4.4. Les lecteurs familiers avec ces schémas de renormalisation peuvent ignorer ces sections. Dans la section 4.2, nous présentons la structure du groupe de renormalisation des oscillateurs couplés dans le schéma de renormalisation de Wilson. Nous montrons que la renormalisation des champs, usuellement réalisée par un facteur de dilatation réel, doit incorporer un facteur de phase complexe (paragraphe 4.2.3). Nous dérivons les équations de groupe de renormalisation associées à ce schéma, et montrons qu'elles ne peuvent mener qu'au point fixe d'une transition de phase non-oscillante (paragraphe 4.2.5). Dans la section 4.3, nous présentons comment renormaliser la théorie de façon à obtenir le point fixe d'une transition oscillante. Pour cela, il nous faut effectuer les transformations de groupe de renormalisation dans des référentiels oscillant à des fréquences différentes dépendant de échelle (paragraphe 4.3.1). Les comportements asymptotiques critiques sont déduits dans le référentiel oscillant à la fréquence effective des oscillations spontanées (paragraphe 4.3.3). Nous présentons enfin dans la section 4.5 la structure du groupe de renormalisation des oscillateurs couplés dans le schéma de renormalisation de Callan-Symanzik, qui nous sera indispensable pour le calcul perturbatif à l'ordre de deux boucles du chapitre 6. Nous montrons comment dériver et résoudre les équations de Callan-Symanzik de la théorie en implémentant les idées spécifiques au groupe de renormalisation des oscillateurs couplés.

### 4.1 Schéma de renormalisation de Wilson

Dans cette section nous présentons le schéma de renormalisation perturbatif de Wilson [147, 18], que nous adapterons dans les section 4.2 et 4.3 aux os-

cillateurs couplés. Cette présentation a un caractère général et n'est en aucun cas spécifique à notre théorie<sup>1</sup>. Elle nous fournira le cadre général nécessaire à l'établissement du schéma de renormalisation qui nous intéresse.

### 4.1.1 Equations de groupe de renormalisation

#### Renormalisation des paramètres

Pour écrire l'intégrale fonctionnelle associée à une théorie des champs (qui dans notre cas est donnée par l'expression (2.18)), nous écrivons la limite continue d'expressions définies de manière discrète. Physiquement, la discrétisation correspond à l'existence d'un réseau spatial sur lequel sont placés les oscillateurs individuels en interaction. Il n'y a donc aucune raison physique pour que la limite continue existe. En réalité, comme nous l'avons déjà entrevu dans la section 3.4, la convergence n'a pas lieu dès que la dimension spatiale est supérieure à 2 et l'on ne peut pas s'affranchir totalement du réseau sous-jacent à la théorie. Les fonctions de corrélation que nous calculons ne sont proprement définies que pour une théorie sur réseau et leurs expressions dépendent de la maille du réseau  $a$ . Les calculs sur réseau peuvent être menés, et ont permis l'élaboration de la première version du groupe de renormalisation [84, 88]. Cette approche est techniquement lourde et il existe d'autres façons plus adaptées d'implémenter la procédure de renormalisation. Au lieu d'introduire la maille du réseau  $a$  dans l'espace direct, la technique de Wilson consiste à introduire une coupure  $\Lambda \sim 2\pi/a$  dans les intégrales sur l'espace de Fourier, c'est à dire à restreindre les intégrales sur cet espace à une boule de rayon  $\Lambda$  [143]. Les topologies des deux théories ainsi définies sont différentes, la topologie résultant de l'introduction d'une coupure étant nettement plus simple dans l'espace de Fourier. On peut toutefois montrer que les deux théories appartiennent à la même classe d'universalité, et possèdent le même comportement asymptotique de grande échelle. Les calculs de théorie des champs que nous utilisons, basés sur des développements asymptotiques, ne peuvent donner accès qu'aux quantités universelles. Ce sont elles qui nous intéressent, et ceci valide le choix de l'une ou l'autre des deux méthodes. Nous effectuons le choix le plus simple techniquement.

Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe 1.2.2, nous souhaitons d'abord exprimer les paramètres décrivant le comportement effectif de la théorie à une certaine échelle, lorsque nous connaissons ceux qui décrivent ce même comportement à une échelle inférieure. La présence de la coupure nous donne l'échelle à laquelle correspond notre jeu de paramètre qui intervient dans l'écriture de la théorie. Nous partons donc de la fonction de partition de la théorie, écrite avec une coupure  $\Lambda$  dans l'espace des impulsions :

$$Z = \int_{0.. \Lambda} \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[-i\tilde{\psi}] \exp \left\{ \mathcal{S}[\tilde{\psi}, \psi] \right\} \quad (4.1)$$

$\psi$  et  $\tilde{\psi}$  sont les champs dynamiques du formalisme de Janssen-De Dominicis [73, 26] (voir annexe D), et  $\mathcal{S}[\tilde{\psi}, \psi]$  est l'action de la théorie, donnée par une équation

---

<sup>1</sup>Des exposés détaillés de cette technique peuvent être trouvés entre autres dans les ouvrages [18, 91].

similaire à (2.26)<sup>2</sup>. Les intégrales dans l'espace des impulsions portent sur la boule de rayon  $\Lambda$ . Nous souhaitons calculer la valeur des paramètres effectifs de la théorie à une échelle  $\Lambda/b$ ,  $b$  étant un paramètre de dilatation supérieur à 1. Nous écrivons donc :

$$Z = \int_{0.. \Lambda/b} \mathcal{D}[\psi^<] \mathcal{D}[-i\tilde{\psi}^<] \int_{\Lambda/b.. \Lambda} \mathcal{D}[\psi^>] \mathcal{D}[-i\tilde{\psi}^>] \exp \left\{ \mathcal{S}[\tilde{\psi}^< + \tilde{\psi}^>, \psi^< + \psi^>] \right\} \quad (4.2)$$

où  $\psi^<$  (resp.  $\tilde{\psi}^<$ ) contient les modes de Fourier du champ  $\psi$  (resp.  $\tilde{\psi}$ ) d'impulsion de norme inférieure à  $\Lambda/b$ , et réciproquement pour  $\psi^>$  (resp.  $\tilde{\psi}^>$ ). L'intégration partielle sur les dépendances des champs dans les modes de Fourier de grandes longueurs d'ondes, nous donne l'expression suivante :

$$Z = \int_{0.. \Lambda/b} \mathcal{D}[\psi^<] \mathcal{D}[-i\tilde{\psi}^<] \exp \left\{ \mathcal{S}^<[\tilde{\psi}^<, \psi^<] \right\} \quad (4.3)$$

où  $\mathcal{S}^<[\tilde{\psi}^<, \psi^<]$  est calculée de telle sorte que la fonction de partition  $Z$  soit inchangée.

Si l'on se contente de cette opération, on a trivialement les mêmes fonctions de corrélation et de réponse pour les deux expressions de la théorie, exprimées simplement à l'aide de jeux de paramètres différents,  $\Lambda$  étant un de ces paramètres. Mais la coupure  $\Lambda$  (ou la maille du réseau  $a$ ) introduit une échelle de référence dans le problème, et il nous faut comparer les deux expressions de la théorie dans des unités de longueur différentes, de façon à ce que celles-ci aient la même échelle de référence "effective". Ceci correspond alors bien à considérer la description effective de la même théorie à des échelles différentes. On compare alors entre elles les grandeurs calculées *relativement* à l'échelle de référence de chacune des théories. On peut démontrer qu'après cette dernière opération, appelée dilatation d'échelle, nous pouvons écrire :

$$Z = \int_{0.. \Lambda} \mathcal{D}[\psi^R] \mathcal{D}[-i\tilde{\psi}^R] \exp \left\{ \mathcal{S}^R[\tilde{\psi}^R, \psi^R] \right\} \quad (4.4)$$

où  $\mathcal{S}^R$  a la même structure que l'action  $\mathcal{S}$ , exprimée en termes de grandeurs dites renormalisées [18, 91].

La présence de termes non-linéaires dans l'équation dynamique, qui se traduit par des termes non quadratiques dans l'action, nous empêche de faire un calcul exact de cette transformation, et nous devons traiter les non-linéarités perturbativement. Techniquement, les termes de la série perturbative peuvent être représentés sous forme de diagrammes de Feynman, dont les conventions de représentation pour notre théorie sont précisées dans l'annexe C. L'ordre du développement effectué se traduit graphiquement par la présence d'un nombre donné de "boucles" dans les diagrammes représentatifs des différents termes, qui correspond au nombre d'intégrales présentes dans les expressions de ces termes. C'est pourquoi ce développement est aussi appelé "développement en nombre de boucles". Nous avons vu dans le paragraphe 2.3.3 et grâce aux relations

<sup>2</sup>Cette section ayant un caractère général, nous omettons les indices des variables de champs.

(2.33) que la fonctionnelle  $\Gamma[\tilde{\Psi}, \Psi]$  pouvait être vue comme une action effective de la théorie après intégration sur les fluctuations. Les dérivées fonctionnelles de  $\Gamma$  donnent les paramètres effectifs de la théorie. D'autre part, dans un calcul perturbatif, ces dérivées fonctionnelles sont représentées par les diagrammes 1-particule irréductibles sans propagateur externe de la théorie, appelés aussi vertex propres. Dans un schéma de renormalisation de Wilson, les paramètres renormalisés intervenant dans l'expression de l'action  $\mathcal{S}^R$  sont égaux aux paramètres d'origine ajoutés de la somme des diagrammes qui interviennent dans le développement perturbatif de la dérivée fonctionnelle de  $\Gamma$  qui leur est associée. Les intégrales dans l'espace des impulsions associées aux boucles des diagrammes se font sur la couche d'impulsions de norme comprise entre  $\Lambda/b$  et  $\Lambda/(b \exp \delta l)$  (voir entre autres [147] et [18]).

### Flot de renormalisation et points fixes

Rappelons que nous souhaitons accéder au comportement de grande échelle du système. Nous devons donc *a priori* effectuer les opérations précédentes pour un grand facteur de dilatation  $b$ . Or les intégrales de la série perturbative décrite précédemment ne sont pas facilement calculables. En revanche, nous avons facilement accès aux expressions des dérivées des paramètres effectifs en fonction du facteur de dilatation  $b$ . Techniquement nous partons d'une théorie effective décrite à une échelle  $\Lambda/b$  (dont la valeur en termes des unités effectives est  $\Lambda$ ), et nous cherchons à calculer les paramètres effectifs de cette même théorie à une autre échelle  $\Lambda/b'$ , où  $b' = b \exp \delta l$ . Puisque le facteur de dilatation  $b$  n'intervient pas explicitement dans l'expression de l'intégrale fonctionnelle (notamment grâce à la dilatation d'échelle, qui a entre autres pour effet de garder  $\Lambda$  constant au cours de la procédure de renormalisation), le calcul est exactement identique quel que soit  $b$ , et l'expression des paramètres renormalisés à l'échelle  $b \exp \delta l$  ne dépend pas explicitement de  $b$ . Considérons alors l'expression de la dérivée d'un paramètre effectif  $x$  de la théorie en fonction de l'échelle. Nous avons :

$$\frac{dx(b)}{d \ln b} = \left. \frac{dx(b e^{\delta l})}{d(\delta l)} \right|_{\delta l=0} = \{\text{une fonction seulement des paramètres à l'échelle } b\}$$

L'expression des dérivées des paramètres en fonction de  $b$  constitue donc un système différentiel autonome<sup>3</sup> du premier ordre dans la variable  $l = \ln b$ . Ce système est constitué d'équations différentielles non-linéaires couplées, qui décrivent l'évolution des paramètres effectifs en fonction de l'échelle, et qui sont appelées "équations de groupe de renormalisation".

Nous avons reformulé le problème du calcul de l'évolution des paramètres en fonction de l'échelle, passant d'un calcul d'intégrales à l'intégration d'un système différentiel. La nouvelle forme est intuitivement nettement préférable. En effet, nous pouvons tracer le flot d'évolution du jeu de paramètres en fonction de l'échelle. Sur une même ligne de flot se situent des jeux de paramètres décrivant le même système physique à des échelles différentes. Le point critique

---

<sup>3</sup>C'est à dire qui ne fait pas intervenir la variable  $l = \ln b$  de manière explicite.

correspond au point fixe du groupe de renormalisation, et les propriétés du point fixe donnent les quantités universelles (voir le paragraphe 1.2.2). L'invariance d'échelle au point fixe impose aux grandeurs physiques de s'écrire sous la forme de lois d'échelle. Comme nous l'avons dit, le comportement des équations de groupe de renormalisation au voisinage du point fixe donne accès au comportement effectif d'un système "presque critique" sur une large gamme d'échelles. La linéarisation des équations autour du point fixe permet une intégration analytique. Les valeurs propres du système linéarisé dans la variable  $l = \ln b$  donnent des lois de puissance dans la variable  $b$ . Les exposants associés sont des quantités universelles et sont appelés "exposants critiques".

### Conditions de renormalisation et dimensions anormales

En réalité le calcul de l'action effective  $\mathcal{S}^R[\tilde{\psi}^R, \psi^R]$ , définie de telle sorte que la fonction de partition  $Z$  soit invariante sous renormalisation, nous laisse un certain nombre de degrés de liberté, et plusieurs écritures différentes laisseront la fonction de partition  $Z$  inchangée. Il y a donc un certain arbitraire (ou choix) dans la façon dont nous implémentons le groupe de renormalisation. La technique usuelle consiste à décider que certains paramètres de la théorie restent inchangés par renormalisation, ce qui gèle les degrés de liberté. Cette approche est certainement compatible avec l'existence de points fixes, et permet d'avoir le minimum de contraintes possible pour leur existence. Ce choix impose en revanche de renormaliser les champs de la théorie, ainsi que la coordonnée temporelle<sup>4</sup>. Physiquement, la procédure est claire : en effet, de même qu'il y a une unité de longueur naturelle qui dépend de l'échelle à laquelle on regarde le système (et qui dans ce cas varie simplement proportionnellement à l'échelle à laquelle on regarde le système), il y a une unité de temps et une unité de mesure de l'amplitude des champs associées à chaque échelle. Alors de même que l'on a vu qu'il nous fallait redéfinir les unités de longueur en fonction de l'échelle à laquelle on regarde le système, il nous faut aussi mesurer les champs et les temps dans des unités qui dépendent de l'échelle. L'intégration sur les non-linéarités introduit une renormalisation non triviale de ces unités (en plus d'une simple dilatation d'échelle). Au point fixe, l'invariance d'échelle impose que ces unités soient des lois de puissance en fonction de l'échelle spatiale. Les exposants de ces lois de puissances sont appelés dimensions anormales, par opposition aux dimensions canoniques.

#### 4.1.2 Paramètres renormalisés et cohérence de la théorie

##### Symétries

Nous avons dit que les paramètres renormalisés s'exprimaient à partir des dérivées de la fonctionnelle  $\Gamma$ . D'autre part, les propriétés de symétrie de la théorie nous permettent de montrer que seules certaines dérivées de cette fonctionnelle peuvent être non nulles. Par conséquent, seuls certains paramètres du développement de Taylor de l'action effective de la théorie peuvent être renor-

---

<sup>4</sup>Voir sur ce point le commentaire du paragraphe 4.3.5.

malisés. Nous détaillerons dans le paragraphe 4.2.2, et dans le cadre de notre théorie, les restrictions que nous obtenons sur la renormalisation des paramètres et qui sont dues aux propriétés de symétries.

### Dimensions canoniques

Parmi les paramètres dont la renormalisation est autorisée par symétrie, les paramètres non pertinents, qui sont multipliés par un facteur contractant par dilatation d'échelle, ne changent pas le comportement critique de grande échelle, et peuvent donc être négligés dans le calcul<sup>5</sup>. Pour déterminer le caractère pertinent ou non d'un paramètre, il nous faut connaître sa dimension canonique  $d_c$ , qui donne l'exposant du facteur par lequel le paramètre est multiplié lors de l'opération de dilatation d'échelle ( $x \rightarrow xe^{d_c \delta l}$ ).

Comme nous l'avons dit précédemment, il y a un certain arbitraire dans la façon de renormaliser la théorie, et nous décidons de garder constante la valeur de certains paramètres de l'action  $\mathcal{S}$  sous renormalisation. Cela dit, il nous faut encore choisir les paramètres que nous décidons de garder constants. Les degrés de liberté dans l'écriture de l'action renormalisée sont en fait autant de degrés de liberté dans la paramétrisation des points fixes : fixer un certain nombre de paramètres dans le calcul de l'action renormalisée, puis chercher les points fixes dans ce cadre, correspond à paramétrer les points fixes de la théorie à l'aide des paramètres que l'on a fixés. Un autre choix pour les paramètres fixés *a priori* conduirait simplement à une reparamétrisation des points fixes.

Etant maintenant convaincus de ce libre choix, considérons la théorie gaussienne. Dans ce cas aucune renormalisation non triviale n'intervient, les variations des paramètres étant juste données par les facteurs de dilatation d'échelle. Sous renormalisation, ces facteurs de dilatation sont des lois de puissance ( $x \rightarrow xe^{d_c \delta l}$  où  $d_c$  est la dimension canonique de  $x$ ). Comme les longueurs mesurées relativement à l'échelle de référence décroissent sous renormalisation, on choisira  $-1$  pour dimension spatiale ( $[\mathbf{x}] = -1$ ), et on exprimera les autres dimensions relativement à celle-ci. L'action de la théorie doit être globalement sans dimension ; cela donne des contraintes sur les dimensions des paramètres, mais il reste dans cette opération des degrés de liberté<sup>6</sup>. En termes des grandeurs relatives à notre théorie, nous verrons que nous aurons besoin, au moins pour les étapes intermédiaires de calcul, d'introduire un paramètre  $\lambda$  comme coefficient du terme  $-\tilde{\psi}_\alpha \partial_t \psi_\alpha$  dans l'action (2.19), ce qui nous donne trois degrés de liberté dans l'expression des dimensions des différentes grandeurs. Nous souhaitons certainement que le paramètre  $r$ , qui représente le paramètre de contrôle dans la version déterministe de la bifurcation, soit un paramètre pertinent sous renormalisation. Nous choisissons donc de fixer les dimensions des paramètres  $c$ ,  $\lambda$  et  $D$  à zéro, ce qui gel les degrés de liberté et fixe les dimensions de toutes les quantités. Pour être cohérent avec la théorie gaussienne, nous imposerons en plus à ces paramètres d'être constants dans la procédure de renormalisation générale<sup>7</sup>. Ceci

---

<sup>5</sup>Voir le commentaire à ce sujet un peu plus loin.

<sup>6</sup>En effet nous avons, en plus des dimensions des paramètres, les dimensions du temps et des deux champs dynamiques à choisir.

<sup>7</sup>Dans le cas du modèle  $O(n)$  dynamique, on choisit plutôt habituellement de renormaliser



nous impose les valeurs suivantes pour les dimensions canoniques des différentes grandeurs :

$$\begin{aligned}
 [D] &= 0 & [\lambda] &= 0 & [c] = [c_a] &= 0 & ; & [\mathbf{x}] &= -1 & [\mathbf{q}] &= 1 \\
 [t] &= -2 & [\omega] &= 2 & ; & [r] = [\omega_0] &= 2 & [u] = [u_a] &= 4 - d \\
 [\psi_\alpha(\mathbf{q}, \omega)] &= -\frac{d+6}{2} & [\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{q}, \omega)] &= -\frac{d+2}{2} & & & & & & & (4.5)
 \end{aligned}$$

### Paramètres non pertinents

Supposons avoir gardé dans notre équation dynamique (2.11) des termes contenant des puissances d'ordre supérieur dans un développement en puissances du champ  $\psi$  et de l'ordre de ses dérivées spatiales. De tels termes ne sont pas interdits par la mise sous forme générique de la dynamique telle que nous l'avons présentée dans le chapitre 1. Cependant, nous pouvons nous convaincre que les dimensions canoniques des constantes de couplage associées à ces termes sont toutes négatives. Un argument simpliste nous indique donc que la dilatation d'échelle associée aux transformations de renormalisation a pour effet d'emmenner les valeurs des couplages effectifs associés à ces paramètres vers 0. Ainsi les comportements asymptotiques du système ne devraient pas être affectés par la présence de ces termes. Cependant, l'intégration sur les fluctuations en présence de ces termes introduit de nouveaux diagrammes dans le développement perturbatif, qui présentent des divergences, et l'effet global n'est donc pas évident. On peut toutefois montrer que la présence de ces termes n'affecte pas les comportements asymptotiques à l'ordre dominant. Cette justification, commune à toutes les théories des champs (et dont la reproduction explicite dépasserait le cadre de cette thèse) est discutée dans les références [91, 11]. Une discussion détaillée du rôle des opérateurs non pertinents, important pour les corrections aux lois d'échelle, peut-être trouvée par exemple dans [2].

### 4.1.3 Comportement critique en dimension supérieure à 4

Dans la section 3.4, nous avons donné un argument prouvant que la théorie champ moyen était invalidée en dimension d'espace inférieure à 4. En dimension supérieure à 4, aucune contradiction avec la théorie champ moyen n'était visible, mais cela ne constituait pas une preuve de sa validité. Nous sommes maintenant en mesure de fournir un argument général. En effet, en dimension supérieure à 4, les non-linéarités autorisées par symétrie sont toutes associées à des paramètres non pertinents, et la théorie gaussienne, point fixe du groupe de renormalisation, constitue un point fixe stable, et possède donc un bassin d'attraction de taille non nulle. Pour toute théorie décrite microscopiquement par un jeu de paramètres appartenant à ce bassin d'attraction, les transformations de renormalisation n'ont des effets non triviaux que sur des dilatations d'échelle finies<sup>8</sup>. En effet, sur des dilatations d'échelle infiniment grandes, les valeurs effectives de ces paramètres sont infiniment petites. Dans les unités d'origine, ceci affecte de

---

le coefficient  $D$  (voir le paragraphe 4.3.5).

<sup>8</sup>En dehors de ce bassin d'attraction, notre étude, intrinsèquement perturbative, ne nous permet pas de conclure.

manière *finie* les valeurs des paramètres effectifs de la théorie. Naturellement, les quantités correspondant par exemple à la valeur critique du paramètre de contrôle ou l'amplitude des fonctions de corrélation et de réponse sont modifiées par rapport à celles calculées dans le cadre de la théorie champ moyen ; mais il s'agit là de quantités non-universelles. En revanche, les comportements asymptotiques prévus par la théorie champ moyen ne sont pas affectés par la renormalisation, et les exposants critiques dérivés dans le cadre de l'approximation de Landau sont corrects.

## 4.2 Renormalisation des oscillateurs couplés dans le schéma de Wilson

Dans cette section, nous présentons le schéma de renormalisation de Wilson adapté à la renormalisation des oscillateurs couplés. Dans les premiers paragraphes, nous présentons les arguments dimensionnels et les arguments de symétrie assurant la cohérence de la théorie. Nous montrons qu'il est nécessaire, en plus de la procédure habituelle, qui renormalise l'amplitude des champs dynamiques, de renormaliser la phase relative de ces champs, ce que nous commentons dans le paragraphe 4.2.3. Le paragraphe 4.2.4 présente de façon détaillée comment obtenir les équations de groupe de renormalisation à partir de l'intégrale fonctionnelle (2.18) ; nous verrons notamment que nous choisissons de renormaliser de façon non triviale la coordonnée temporelle, et de laisser l'amplitude du bruit  $D$  constante sous renormalisation, ce que nous commenterons dans la section suivante, paragraphe 4.3.5. Nous montrons enfin que notre procédure ne peut mener qu'au point fixe d'une transition non-oscillante, et motivons la nécessité de développer une méthode plus astucieuse.

### 4.2.1 Dimensions canoniques

Pour déterminer les dimensions canoniques des paramètres de notre théorie, nous suivons la procédure exposée dans le paragraphe 4.1.2. Nous verrons dans le paragraphe 4.2.4 que nous avons besoin d'introduire un paramètre  $\lambda$  complexe comme coefficient du terme  $-\tilde{\psi}_\alpha \partial_t \psi_\alpha$  dans l'action (2.19). Nous verrons en effet que, même si il reste égal à 1 au cours de la procédure de renormalisation, les calculs intermédiaires font intervenir des variations de ce paramètre. En termes des paramètres de la théorie présentés dans le chapitre 2 et de ce coefficient  $\lambda$ , les dimensions canoniques des différentes grandeurs associées à notre théorie sont données par le système (4.5).

### 4.2.2 Symétries

Dans ce paragraphe nous nous intéressons aux contraintes de symétries de la théorie, qui empêchent l'apparition de nouveaux paramètres pertinents par renormalisation. Nous montrons que l'action que nous avons écrite est stable sous renormalisation, ce qui assure la cohérence de la théorie.

Comme nous l'avons déjà signalé, la renormalisation des paramètres est donnée par les vertex propres de la théorie, qui correspondent également aux termes

perturbatifs des dérivées de la fonctionnelle  $\Gamma$ . Nous savons que les propriétés de symétrie de la théorie imposent la nullité de certaines dérivées de cette fonctionnelle. Par conséquent, seuls certains paramètres d'un développement de Taylor général peuvent être renormalisés. D'autre part, les propriétés de causalité de la théorie imposent les relations (2.40). Ces arguments, associés aux arguments dimensionnels exposés ci-dessus, nous permettent d'assurer la cohérence de la théorie, et sa stabilité sous renormalisation. Nous détaillons ci-dessous ces arguments, et montrons la nécessité de renormaliser la phase relative des champs dynamiques  $\psi_\alpha$  et  $\tilde{\psi}_\alpha$ .

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2.3.3, les dérivées de la fonctionnelle  $\Gamma$  sont des fonctions des impulsions externes  $k_i$ , analytiques en dehors du point critique. Elles peuvent donc être développées en puissances des coordonnées  $\mathbf{q}_i$  et  $\omega_i$  des champs par rapport auxquels la dérivée a été prise. Nous avons alors les propriétés suivantes :

- A cause de l'isotropie de la théorie, ces dérivées ne peuvent dépendre que des normes des impulsions  $\mathbf{q}_i$  :  $q_i = |\mathbf{q}_i|$ . En particulier, dans un développement de Taylor en puissances de  $\mathbf{q}_i$ , ne pourront apparaître que des termes carrés :  $\mathbf{q}_i^2 = \sum_j [(\mathbf{q}_i)_j]^2$
- La relation de causalité (2.40), démontrée perturbativement à tout ordre dans l'annexe D, impose que les dérivées de  $\Gamma$  effectuées par rapport à des champs  $\psi$  seulement soient nulles.

Ainsi que les arguments dimensionnels suivants :

- Le coefficient du terme  $\prod_i \mathbf{q}_i^{2\alpha_i} \prod_i \omega_i^{\beta_i}$  qui apparaît dans le développement d'une dérivée donnée de la fonctionnelle  $\Gamma$  de dimension  $d_\Gamma$  a une dimension :  $d_\Gamma - 2 \sum_i (\alpha_i + \beta_i)$ .
- Au voisinage de 4 dimensions, avec  $d = 4 - \varepsilon$ , les dimensions des dérivées de  $\Gamma$  sont données par :

$$\left[ \Gamma^{(\tilde{N}, N)} \right] = -3\tilde{N} - N + 6 + \varepsilon(N + \tilde{N} - 1) \quad (4.6)$$

Finalement, nous obtenons les restrictions suivantes sur les dérivées de la fonctionnelle  $\Gamma$  :

- $\Gamma^{(2n+1)}$  est nulle pour tout  $n$  à cause de l'invariance par rotation.
- $\Gamma^{(2n)}$  est de dimension négative pour tout  $n \geq 4$ .
- $\Gamma^{(6)}$  est de dimension négative, sauf  $\Gamma^{(6,0)}$  qui est interdit par causalité.
- $\Gamma^{(4)}$  est de dimension négative sauf  $\Gamma^{(4,0)}$ , interdit par causalité, et  $\Gamma^{(3,1)}$ .
- $\Gamma^{(2,0)}$  est interdit par causalité.

D'après cette analyse, les seuls termes à considérer correspondent donc à :  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4)}$ ,  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2)}$  et  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1}^{(2)}$ , les notations étant précisées dans l'annexe A.  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4)}$  et  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2)}$  ont une dimension proche de 0, et seul leur terme constant est à considérer.  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1}^{(2)}$  a dimension 2 et trois termes doivent donc être considérés : son terme constant et ses deux termes linéaires respectivement en  $i\omega$  et  $\mathbf{q}^2$ .

La symétrie rotationnelle impose que les matrices  $\Gamma^{(2)}$  commutent avec les matrices de rotation, et donc des relations analogues à (2.16).  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2}^{(2)}$  est de plus symétrique, et par conséquent seul son terme diagonal subsiste. Nous constatons donc que tous les termes associés à  $\Gamma^{(2)}$  et susceptibles d'apparaître par renormalisation sont déjà représentés par des paramètres dans l'action de départ (2.26), sauf le coefficient linéaire en  $i\omega$  de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \beta_1}^{(2)}$ , dont la partie hors diagonale est nulle, et dont la valeur diagonale est 1. Nous verrons que c'est la renormalisation de la phase relative entre les champs  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$  qui permet d'absorber l'apparition de la partie hors diagonale (voir le paragraphe suivant). L'amplitude, quant à elle, est absorbée dans une redéfinition de l'amplitude des champs dynamiques.

Des relations semblables, basées également sur l'invariance par rotation, sont valables pour  $\Gamma^{(4)}$ , et permettent d'établir qu'aucun nouveau coefficient pertinent n'est introduit par renormalisation. Nous en verrons la démonstration au premier ordre directement sur le calcul des diagrammes à l'ordre d'une boucle.

### 4.2.3 Renormalisation de la phase

Nous venons de voir que le terme linéaire en  $i\omega$  du coefficient hors-diagonal de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \beta_1}^{(2)}$ , nul au départ, était créé par renormalisation. Pour conserver la cohérence de la théorie, il nous faut absorber ce terme dans une redéfinition des champs. Les champs  $\psi_\alpha$  et  $\tilde{\psi}_\alpha$  possèdent deux composantes, qui correspondent aux parties réelles et imaginaires de champs complexes. Une redéfinition de la phase relative de ces champs permet l'absorption de ce terme<sup>9</sup>. Physiquement, cette phase relative est directement liée à la phase relative entre le champ dynamique  $Z$  et le champ externe  $f$  dans l'équation dynamique (2.1), et donc physiquement à la phase relative entre force et vitesse (voir paragraphe 2.1.1). Ainsi, quitte à suivre l'évolution d'un paramètre de phase effectif  $\theta$  au cours de la procédure de renormalisation, et à redéfinir les champs renormalisés tournés de cette phase effective, nous décrivons notre groupe de renormalisation en termes d'une théorie qui, à l'échelle considérée, ne contient jamais ce terme qui, *a priori*, nous gênait. L'idée est tout à fait semblable à l'introduction des facteurs  $Z$  dans un schéma de renormalisation classique.

Nous souhaitons maintenant calculer l'évolution de cette phase effective en fonction de l'échelle. Nous constatons deux choses : premièrement, l'évolution des autres paramètres de la théorie en fonction de l'échelle s'exprime indépendamment de ce paramètre de phase<sup>10</sup>, et les points fixes peuvent donc être cherchés dans l'espace des paramètres qui ne contient pas  $\theta$ ; deuxièmement, la dérivation de l'expression obtenue pour une variation infinitésimale de  $\theta$  mène à une équation différentielle découplée des équations de groupe de renormalisation, décrivant l'évolution de la phase effective  $\theta(l = \ln b)$ . Il faut noter que la dérivée ainsi calculée, par rapport à la variable  $l$ , s'exprime uniquement en fonction des autres paramètres de la théorie (voir paragraphe 4.1.1). Après avoir intégré les équations de groupe de renormalisation, la résolution de cette équation

<sup>9</sup>Il faut noter que, à cause de l'invariance de phase de l'équation dynamique, un changement de phase global dans la définition des champs laisse l'action invariante.

<sup>10</sup>Puisque l'action effective, écrite en termes des champs renormalisés, ne contient pas ce paramètre.

tion différentielle consiste alors uniquement en un calcul de primitive. Au point fixe, la dérivée est constante dans la variable  $l = \ln b$ , et  $\theta(l)$  est linéaire en  $l$ . Nous reviendrons sur ce résultat *a priori* surprenant dans le chapitre 7.

#### 4.2.4 Equations de groupe de renormalisation

Nous allons maintenant implémenter techniquement et en détails la procédure de renormalisation qui a été décrite ci-dessus.

##### Renormalisation infinitésimale des paramètres

Nous partons d'une théorie des champs dynamique, décrite en transformée de Fourier par la fonctionnelle génératrice (2.26), dont l'action est écrite en termes de paramètres microscopiques qui décrivent une physique à une échelle  $a$ , c'est à dire comportant une coupure dans l'espace des impulsions égale à  $\Lambda \sim 2\pi/a$ . Cette théorie dite microscopique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(0)} [\tilde{\psi}_\alpha^{(0)}, \psi_\alpha^{(0)}] &= \int_{\mathbf{q}} \int_{\omega}^{\Lambda} \left\{ D^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} - \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} [i\omega + r^{(0)} + c^{(0)} \mathbf{q}^2] \psi_\alpha^{(0)} - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} [(\omega_0^{(0)} + c_a^{(0)} \mathbf{q}^2) \varepsilon_{\alpha\beta}] \psi_\beta^{(0)} \right\} - \int_{k_1 k_2 k_3}^{\Lambda} U_{\alpha\beta}^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} \psi_\beta^{(0)} \psi_\gamma^{(0)} \psi_\gamma^{(0)} \end{aligned}$$

Après une renormalisation de facteur de dilatation fini  $b$ , la théorie est décrite par une action effective, qui comporte un jeu de paramètres effectifs (ou renormalisés), ainsi que les quantités effectives suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= b\mathbf{q}^{(0)} \\ \omega &= b^2 Z_\omega(b) \omega^{(0)} \\ \psi_\alpha(\mathbf{q}, \omega) &= b^{-\frac{d+6}{2}} \sqrt{Z(b)} \psi_\alpha^{(0)}(\mathbf{q}^{(0)}, \omega^{(0)}) \\ \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{q}, \omega) &= b^{-\frac{d+2}{2}} \sqrt{\tilde{Z}(b)} \Omega_{\alpha\beta}(\theta(b)) \tilde{\psi}_\beta^{(0)}(\mathbf{q}^{(0)}, \omega^{(0)}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

où :

$$\Omega_{\alpha\beta}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Le champ  $\tilde{\psi}_\alpha$  a été tourné d'un angle  $\theta(b)$  pour absorber le terme hors diagonal de  $\Gamma^{(2)}$  linéaire en  $i\omega$ , et trois "facteurs  $Z$ " ont été introduits pour garder  $c$ ,  $D$  et le coefficient de  $i\omega \tilde{\psi}_\alpha \psi_\alpha$  (noté  $\lambda$ ) constant et égal à 1. Les lois de puissance en  $b$  représentent le résultat des dilatations d'échelle. Nous obtenons l'action effective suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{eff}} [\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] &= \int_{\mathbf{q}} \int_{\omega}^{\Lambda} \left\{ D \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\psi}_\alpha - \tilde{\psi}_\alpha [i\omega + r + c \mathbf{q}^2] \psi_\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\psi}_\alpha [(\omega_0 + c_a \mathbf{q}^2) \varepsilon_{\alpha\beta}] \psi_\beta \right\} - \int_{k_1 k_2 k_3}^{\Lambda} U_{\alpha\beta} \tilde{\psi}_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\gamma \end{aligned} \tag{4.9}$$

Il faut noter que la coupure  $\Lambda$  n'a pas changé de valeur, sans toutefois se méprendre sur l'interprétation : physiquement, l'échelle de la théorie effective est bien liée à une coupure  $\Lambda/b$ , qui est  $b$  fois plus petite que la coupure d'origine. Cette coupure est simplement mesurée dans une nouvelle unité de longueur telle que sa valeur soit la même que celle de la coupure d'origine. Nous avons expliqué précédemment le but et le principe de cette manoeuvre.

Nous cherchons maintenant la relation entre les paramètres effectifs à des échelles différentes  $\Lambda/b$  et  $\Lambda/b'$ . Pour cela nous effectuons une transformation de renormalisation infinitésimale de facteur de dilatation égal à  $b'/b = \exp \delta l$ . Nous divisons l'intégrale sur les impulsions en deux parties :

$$\int_0^\Lambda = \int_0^{\Lambda/e^{\delta l}} + \int_{\Lambda/e^{\delta l}}^\Lambda \quad (4.10)$$

et nous intégrons sur la couche d'impulsions comprises entre  $\Lambda/e^{\delta l}$  et  $\Lambda$ . Nous calculons une première action intermédiaire  $\mathcal{S}^{(1)}$ , définie de façon à ce que la fonction de partition (2.26), écrite en termes de cette nouvelle action, soit la même que celle dont nous sommes partis :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(1)} [\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] &= \int_{\mathbf{q}}^{\Lambda/e^{\delta l}} \int_{\omega} \left\{ (D + \delta D) \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\psi}_\alpha - \tilde{\psi}_\alpha [i(1 + \delta\lambda_1)\omega + (r + \delta r) + (c + \delta c)\mathbf{q}^2] \psi_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\psi}_\alpha [i\delta\lambda_2\omega + (\omega_0 + \delta\omega_0) + (c_a + \delta c_a)\mathbf{q}^2] \varepsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta \right\} - \int_{k_1 k_2 k_3}^{\Lambda/e^{\delta l}} (U_{\alpha\beta} + \delta U_{\alpha\beta}) \tilde{\psi}_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\gamma \end{aligned} \quad (4.11)$$

A ce stade, les variations des coefficients sont données par les diagrammes 1-particule irréductibles sans propagateurs externes de la théorie, dans lesquels les intégrales portant sur les impulsions sont restreintes à la couche comprise entre  $\Lambda/e^{\delta l}$  et  $\Lambda$ . Il faut noter que nous n'avons pas mentionné les variations des paramètres non-pertinents, dont nous savons qu'ils n'influencent pas les lois asymptotiques de grande échelles. De façon à éliminer le terme  $\delta\lambda_2$  qui a été créé par renormalisation, nous on introduisons un jeu de champs  $(\psi_\alpha^{(2)}, \tilde{\psi}_\alpha^{(2)})$ , défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{(2)} &= \psi_\alpha \\ \tilde{\psi}_\alpha^{(2)} &= \Omega_{\alpha\beta}(\delta\theta) \tilde{\psi}_\beta \end{aligned} \quad (4.12)$$

Il est alors possible de choisir  $\delta\theta$  de telle façon qu'en termes de ces nouveaux champs l'action s'écrive :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(2)} [\tilde{\psi}_\alpha^{(2)}, \psi_\alpha^{(2)}] &= \int_{\mathbf{q}}^{\Lambda/e^{\delta l}} \int_{\omega} \left\{ (D + \delta D^{(2)}) \tilde{\psi}_\alpha^{(2)} \tilde{\psi}_\alpha^{(2)} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\psi}_\alpha^{(2)} [i(1 + \delta\lambda^{(2)})\omega + (r + \delta r^{(2)}) + (c + \delta c^{(2)})\mathbf{q}^2] \psi_\alpha^{(2)} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\psi}_\alpha^{(2)} [(\omega_0 + \delta\omega_0^{(2)}) + (c_a + \delta c_a^{(2)})\mathbf{q}^2] \varepsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta^{(2)} \right\} - \int_{k_1 k_2 k_3}^{\Lambda/e^{\delta l}} (U_{\alpha\beta} + \delta U_{\alpha\beta}^{(2)}) \tilde{\psi}_\alpha^{(2)} \psi_\beta^{(2)} \psi_\gamma^{(2)} \psi_\gamma^{(2)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

c'est à dire qu'elle ne contienne pas de terme hors diagonal proportionnel à  $i\omega$ . Pour cela nous devons choisir :

$$\delta\theta = \arctan \left[ -\delta\lambda_2(1 + \delta\lambda_1)^{-1} \right] \quad (4.14)$$

et les nouvelles variations des paramètres sont alors données par :

$$\begin{aligned} \delta D^{(2)} &= \delta D \\ \delta\lambda^{(2)} &= (C - 1) + \delta\lambda_1 C - \delta\lambda_2 S \\ \delta r^{(2)} &= r(C - 1) + \delta r C - (\omega_0 + \delta\omega_0)S \\ \delta c^{(2)} &= c(C - 1) + \delta c C - (c_a + \delta c_a)S \\ \delta\omega_0^{(2)} &= \omega_0(C - 1) + \delta\omega_0 C + (r + \delta r)S \\ \delta c_a^{(2)} &= c_a(C - 1) + \delta c_a C + (c + \delta c)S \\ \delta U_{\alpha\beta}^{(2)} &= U_{\alpha\sigma}(\Omega_{\sigma\beta}(\delta\theta) - I_{\sigma\beta}) + \delta U_{\alpha\sigma}\Omega_{\sigma\beta}(\delta\theta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

où il a été posé  $C = \cos \delta\theta$  et  $S = \sin \delta\theta$ .

Effectuons maintenant la dilatation d'échelle de taille  $e^{\delta l}$ , de telle sorte que la coupure apparaissant dans l'action (4.13), mesurée dans cette nouvelle unité, soit égale à  $\Lambda$ . Ceci nous définit les impulsions, les fréquences et les champs effectifs (ou renormalisés) à l'échelle  $\Lambda/b'$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}' &= e^{\delta l} \mathbf{q} \\ \omega' &= e^{2\delta l} Z'_\omega \omega \\ \psi'_\alpha(\mathbf{q}', \omega') &= e^{-\frac{d+6}{2}\delta l} \sqrt{\tilde{Z}'_\alpha} \psi_\alpha(\mathbf{q}, \omega) \\ \tilde{\psi}'_\alpha(\mathbf{q}', \omega') &= e^{-\frac{d+2}{2}\delta l} \sqrt{\tilde{Z}'_\alpha} \tilde{\psi}_\alpha^{(2)}(\mathbf{q}, \omega) \\ &= e^{-\frac{d+2}{2}\delta l} \sqrt{\tilde{Z}'_\alpha} \Omega_{\alpha\beta}(\delta\theta) \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{q}, \omega) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nous avons introduit trois facteurs  $Z$ , calculés de telle sorte que les paramètres  $c$ ,  $D$  et  $\lambda$  restent constants par renormalisation. Ceci nous permet de calculer *a posteriori* les nouveaux paramètres effectifs à l'échelle  $\Lambda/b'$ . En fonction des paramètres intermédiaires (4.15), nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} c(l + \delta l) &= c(l) & D(l + \delta l) &= D(l) & \lambda(l + \delta l) &= 1 \\ c_a(l + \delta l) &= \left[ c_a(l) + \delta c_a^{(2)} \right] (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-1} \\ r(l + \delta l) &= e^{2\delta l} \left[ r(l) + \delta r^{(2)} \right] (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-1} \\ \omega_0(l + \delta l) &= e^{2\delta l} \left[ \omega_0(l) + \delta\omega_0^{(2)} \right] (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-1} \\ U_{\alpha\beta}(l + \delta l) &= e^{(4-d)\delta l} \left[ U_{\alpha\beta}(l) + \delta U_{\alpha\beta}^{(2)} \right] (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-2} (1 + \delta D^{(2)}/D) (1 + \delta\lambda^{(2)})^{-1} \\ Z_\omega(l + \delta l) &= Z_\omega(l) (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-1} (1 + \delta\lambda^{(2)}) \\ Z(l + \delta l) &= Z(l) (1 + \delta c^{(2)}/c)^3 (1 + \delta D^{(2)}/D)^{-1} (1 + \delta\lambda^{(2)})^{-1} \\ \tilde{Z}(l + \delta l) &= \tilde{Z}(l) (1 + \delta c^{(2)}/c) (1 + \delta D^{(2)}/D) (1 + \delta\lambda^{(2)})^{-1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

L'évolution de la phase  $\theta$ , quant à elle, est donnée par l'équation suivante :

$$\theta(l + \delta l) = \theta(l) + \delta\theta \quad (4.18)$$

où  $\delta\theta$  est donné par (4.14). Elle est découplée du reste des équations, dans le sens où le calcul des paramètres (4.17) ne fait intervenir ni  $\theta(l)$  ni  $\delta\theta$ .

### Groupe de renormalisation

La dérivation des équations (4.17) par rapport à la variable  $\delta l$  nous donne un système d'équations différentielles qui décrit l'évolution des paramètres renormalisés en fonction de l'échelle. Grâce aux relations :

$$\begin{aligned} \frac{dr(l)}{dl} &= \frac{dr(l + \delta l)}{d(\delta l)} \Big|_{\delta l} = 0 \\ \frac{d \ln Z(l)}{dl} &= \frac{d \ln Z(l + \delta l)}{d(\delta l)} \Big|_{\delta l} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

(et leurs analogues pour les autres paramètres), et le fait que le système (4.17) ne fasse intervenir  $\delta l$  que sous la forme d'un pré-facteur exponentiel, nous obtenons un système différentiel autonome en termes de la variable  $l = \ln b^{11}$ . D'autre part, les équations associées à l'évolution des variables  $\ln Z$ , tout comme celle associée à l'évolution de la phase effective  $\theta(l)$ , se découplent du système d'évolution des paramètres. L'intégration de ce système mène à l'expression des paramètres renormalisés pour une dilatation finie  $b$ . A partir des lois de transformation des paramètres, des unités de temps et de l'amplitude des champs, nous pouvons dériver les lois de transformation pour les fonctions de corrélation et de réponse à deux points, qui sont les quantités qui nous intéressent. Nous exprimons ces quantités en fonction de  $\Pi$ , le jeu de paramètres associé à un facteur de dilatation  $b = 1$ , et de  $\Pi'$ , le jeu de paramètres renormalisés. Voici ces lois de transformations dans les différents espaces (directs ou réciproques) de variables d'espace-temps :

Dans l'espace  $(\mathbf{q}, \omega)$

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\mathbf{q}, \omega) &= b^{\frac{d+6}{2}} \sqrt{Z(b)}^{-1} \psi_\alpha^R(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(b)\omega) \\ \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{q}, \omega) &= b^{\frac{d+2}{2}} \sqrt{\tilde{Z}(b)}^{-1} \Omega_{\alpha\beta}(-\theta(b)) \tilde{\psi}_\beta^R(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(b)\omega) \\ C_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega; \Pi) &= b^4 Z(b)^{-1} Z_\omega(b)^{-1} C_{\alpha\beta}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(b)\omega; \Pi') \\ \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega; \Pi) &= b^2 \sqrt{Z(b)\tilde{Z}(b)}^{-1} Z_\omega(b)^{-1} \Omega_{\alpha\sigma}(\theta(b)) \chi_{\sigma\beta}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(b)\omega; \Pi') \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dans l'espace  $(\mathbf{q}, t)$

---

<sup>11</sup>C'est à dire qui ne fait pas intervenir la variable  $l$  de manière explicite.



$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\mathbf{q}, t) &= b^{\frac{d+2}{2}} \sqrt{Z}^{-1} Z_\omega^{-1} \psi_\alpha^R(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega^{-1} t) \\
\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{q}, t) &= b^{\frac{d-2}{2}} \sqrt{\tilde{Z}}^{-1} Z_\omega^{-1} \Omega_{\alpha\beta}(-\theta) \tilde{\psi}_\beta^R(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega^{-1} t) \\
C_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi) &= b^2 Z^{-1} Z_\omega^{-2} C_{\alpha\beta}(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega^{-1} (t_1 - t_2); \Pi') \\
\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi) &= \sqrt{Z\tilde{Z}}^{-1} Z_\omega^{-2} \Omega_{\alpha\sigma}(\theta) \chi_{\sigma\beta}(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega^{-1} (t_1 - t_2); \Pi')
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Dans l'espace  $(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\mathbf{x}, t) &= b^{-\frac{d+2}{2}} \sqrt{Z}^{-1} Z_\omega^{-1} \psi_\alpha^R(\mathbf{x}/b, b^{-2} Z_\omega^{-1} t) \\
\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{x}, t) &= b^{-\frac{d+2}{2}} \sqrt{\tilde{Z}}^{-1} Z_\omega^{-1} \Omega_{\alpha\beta}(-\theta) \tilde{\psi}_\beta^R(\mathbf{x}/b, b^{-2} Z_\omega^{-1} t) \\
C_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2; \Pi) &= b^{(2-d)} Z^{-1} Z_\omega^{-2} C_{\rho\sigma}((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/b, b^{-2} Z_\omega^{-1} (t_1 - t_2); \Pi') \\
\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, t_1 - t_2; \Pi) &= b^{-d} \sqrt{Z\tilde{Z}}^{-1} Z_\omega^{-2} \Omega_{\alpha\sigma}(\theta) \chi_{\sigma\beta}((\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/b, b^{-2} Z_\omega^{-1} (t_1 - t_2); \Pi')
\end{aligned} \tag{4.22}$$

#### 4.2.5 Point fixe d'une transition non-oscillante

Considérons maintenant les points fixes que nous pouvons obtenir avec cette procédure.  $\omega_0$  et  $r$  sont tous deux de dimension canonique égale à 2. L'intégration sur les fluctuations ne peut modifier les comportements d'échelle que de manière infinitésimale, sinon tout le schéma perturbatif s'écroulerait. Ainsi les exposants attachés à ces directions restent-ils positifs au point fixe, même si ceux-ci, ainsi que les directions propres, sont possiblement modifiés.  $\omega_0$  constitue donc un paramètre pertinent du problème ; nous trouvons donc une valeur finie précise de ce paramètre au point fixe, ce qui correspond à la valeur de la pulsation critique dans le système d'unités dilatées. Si l'on ré-exprime les grandeurs dans le système d'unité originel, cette valeur point fixe se trouve être *effectivement* égale à zéro. Ainsi seule une valeur effective zéro du paramètre  $\omega_0$  peut être associée à une théorie critique. Par conséquent, nous ne pouvons trouver par cette technique que la transition vers une phase effectivement non oscillante, ce qui n'est naturellement pas tout à fait ce que nous cherchons.

Une autre manière de formuler la remarque est la suivante : nous cherchons à caractériser une transition vers un état oscillant. Dans ce cas, il y a à la transition une pulsation bien définie des oscillations, ce qui introduit un temps caractéristique dans le problème. Or la propriété d'invariance d'échelle ne peut être vérifiée que lorsque toutes les grandeurs caractéristiques du problème sont nulles ou infinies. Le groupe de renormalisation ne pourra donc présenter de points fixes que pour des valeurs zéro ou infinie de la pulsation effective, qui est décrite par l'évolution du paramètre  $\omega_0$  dans le diagramme de flot. Dans tous les autres cas, la renormalisation du temps interdit que le temps caractéristique lié à la pulsation critique des oscillations spontanées soit point fixe du groupe de renormalisation, tout comme la renormalisation spatiale impose  $\xi = \infty$  au point

fixe (ou  $\xi = 0$ <sup>12</sup>). La façon directe d'implémenter la renormalisation aboutit donc à une impasse : nous n'avons pas accès par cette méthode au point fixe d'une transition dynamique oscillante. Il nous faut implémenter une technique plus sophistiquée que nous présentons dans la section 4.3.

### 4.3 Renormalisation d'une théorie oscillante

Nous avons vu dans la section précédente que l'application directe de la technique de Wilson au problème des oscillateurs couplés menait au point fixe d'une transition non-oscillante. Dans cette section, nous présentons une version plus élaborée du groupe de renormalisation et spécifique à notre théorie. L'idée générale de la méthode consiste, au cours de la procédure de renormalisation, à placer la théorie dans le référentiel oscillant à la pulsation effective du système à l'échelle à laquelle on le considère. La théorie sur laquelle nous effectuons les calculs de renormalisation est alors une théorie qui n'oscille jamais à l'échelle considérée. Par conséquent, son jeu de paramètre ne contient pas  $\omega_0$ . Les transformations de groupe de renormalisation nous donnent une équation d'évolution de la pulsation des oscillations du référentiel dans lequel on travaille. Au point critique, le retour au référentiel originel nous donne la pulsation effective des oscillations spontanées. Le fait que cette technique permette la définition d'une procédure de renormalisation cohérente prouve que le paramètre  $\omega_0$  est "faussetment pertinent".

#### 4.3.1 Elimination du paramètre $\omega_0$

Comme nous l'avons vu précédemment, le paramètre  $\omega_0$  nous gêne, car il est pertinent du point de vue de l'analyse dimensionnelle. De façon à trouver le point fixe d'une bifurcation de Hopf, il nous faut donc éliminer ce paramètre de l'action. Nous avons d'ores et déjà appris à effectuer cette opération dans la section 2.4. L'idée consiste donc à effectuer la renormalisation pour la théorie pour le champ  $U$  défini dans cette section, à calculer les fonctions de corrélation et de réponse pour cette théorie qui n'oscille pas, puis à revenir aux quantités qui nous intéressent grâce aux relations (2.45) et (2.46). Mais le coefficient correspondant à la partie imaginaire du terme quadratique dans l'action n'est pas interdit par symétrie et constitue un paramètre pertinent de la théorie. Il est donc recréé par renormalisation. Ainsi, dans le calcul d'une transformation infinitésimale de renormalisation, nous créons une variation  $i\delta\omega_0$  associée à ce terme. Pour garder une action renormalisée qui ne possède pas le paramètre  $\omega_0$ , il nous faut éliminer cette variation. Nous redéfinissons donc les champs dynamiques en plaçant la théorie dans un référentiel qui oscille à la pulsation  $\omega_0 + \delta\omega_0$ <sup>13</sup>. Ainsi, quitte à suivre l'évolution de la pulsation  $\omega_0(l)$  du référentiel oscillant dans lequel est écrite la théorie en fonction de l'échelle, nous décrivons notre groupe de renor-

---

<sup>12</sup>Ce cas, qui correspond à une physique d'oscillateurs totalement découplés, constitue un point fixe du groupe de renormalisation. Cependant, il n'y a pas de transition de phase qui lui soit associé, et... il n'est pas très passionnant.

<sup>13</sup>C'est en réalité un peu plus compliqué que ça ; voir le paragraphe 4.3.2.

malisation en termes d'une théorie qui, à l'échelle considérée, n'oscille pas, et ne contient donc pas le paramètre  $\omega_0$ .

### 4.3.2 Equations de groupe de renormalisation

#### Variation infinitésimale des paramètres

Nous partons de la même théorie microscopique que précédemment :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(0)} [\tilde{\psi}_\alpha^{(0)}, \psi_\alpha^{(0)}] &= \int_{\mathbf{q}}^\Lambda \int_\omega \left\{ D^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} - \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} [i\omega + r^{(0)} + c^{(0)} \mathbf{q}^2] \psi_\alpha^{(0)} - \right. \\ &\quad \left. \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} [(\omega_0^{(0)} + c_a^{(0)} \mathbf{q}^2) \varepsilon_{\alpha\beta}] \psi_\beta^{(0)} \right\} - \int_{k_1 k_2 k_3}^\Lambda U_{\alpha\beta}^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} \psi_\beta^{(0)} \psi_\gamma^{(0)} \psi_\gamma^{(0)} \end{aligned}$$

et nous définissons, après une dilatation d'échelle de taille  $b$ , des quantités effectives telles que le paramètre  $\omega_0$  n'apparaisse pas dans l'action effective (c'est à dire que le terme constant de la partie hors-diagonale de  $\Gamma^{(1,1)}$ , en termes de ces quantités effectives, soit nul). Ces quantités effectives s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= b\mathbf{q}^{(0)} \\ \omega &= b^2 Z_\omega(b) \omega^{(0)} \\ \varphi_\alpha(\mathbf{q}, t) &= b^{-\frac{d+2}{2}} \sqrt{Z(b)} Z_\omega(b) \Omega_{\alpha\beta}(\hat{\omega}_0(b)t) \psi_\beta^{(0)}(\mathbf{q}^{(0)}, t^{(0)}) \\ \tilde{\varphi}_\alpha(\mathbf{q}, t) &= b^{-\frac{d-2}{2}} \sqrt{\tilde{Z}(b)} Z_\omega(b) \Omega_{\alpha\beta}(\theta(b)) \Omega_{\beta\sigma}(\hat{\omega}_0(b)t) \tilde{\psi}_\sigma^{(0)}(\mathbf{q}^{(0)}, t^{(0)}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

où  $\hat{\omega}_0$  est la pulsation mesurée à l'aide du système d'unités renormalisées<sup>14</sup>. L'action effective est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{eff}} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha] &= \int_{\mathbf{q}}^\Lambda \int_\omega \left\{ D \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{\varphi}_\alpha [i\omega + r + c \mathbf{q}^2] \varphi_\alpha - \tilde{\varphi}_\alpha [0 + c_a \mathbf{q}^2] \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi_\beta \right\} \\ &\quad - \int_{k_1 k_2 k_3}^\Lambda U_{\alpha\beta} \tilde{\varphi}_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \varphi_\gamma \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nous constatons que, comme précédemment, seul le champ  $\tilde{\psi}$  a été tourné pour éliminer la phase statique  $\theta(b)$ , mais que les deux champs sont simultanément tournés pour éliminer le paramètre  $\hat{\omega}_0(b)$ . Nous procédons maintenant à l'intégration sur une couche d'impulsions :

$$\int_0^\Lambda = \int_0^{\Lambda/e^{\delta l}} + \int_{\Lambda/e^{\delta l}}^\Lambda \quad (4.25)$$

<sup>14</sup>La pulsation effective du résultat final, qui sera exprimée dans le système d'unités d'origine, sera notée  $\omega_0(b)$ .

ce qui nous donne une première action intermédiaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(1)}[\varphi_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha] &= \int_{\mathbf{q}}^{\Lambda/e^{\delta t}} \int_{\omega} \left\{ (D + \delta D) \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{\varphi}_\alpha \left[ i(1 + \delta\lambda_1)\omega + (r + \delta r) + (c + \delta c)\mathbf{q}^2 \right] \varphi_\alpha \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\varphi}_\alpha \left[ i\delta\lambda_2\omega + \delta\hat{\omega}_0 + (c_a + \delta c_a)\mathbf{q}^2 \right] \varepsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta \right\} - \int_{k_1 k_2 k_3}^{\Lambda/e^{\delta t}} (U_{\alpha\beta} + \delta U_{\alpha\beta}) \tilde{\varphi}_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \varphi_\gamma \end{aligned} \quad (4.26)$$

les variations des coefficients étant données par les diagrammes 1-particule irréductibles de la théorie, sans propagateurs externes. Par renormalisation nous avons créé, comme précédemment, un terme  $\delta\lambda_2$ , mais également un terme  $\delta\hat{\omega}_0$ , qui ici ne peut pas être absorbé par une redéfinition des paramètres puisque ce coefficient n'est originellement pas présent. Il nous faut donc absorber ces *deux* variations dans une redéfinition des champs.

Nous commençons par définir un premier champ intermédiaire  $\varphi_\alpha^{(1')}$  par :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{(1')} &= \varphi_\alpha \\ \tilde{\varphi}_\alpha^{(1')} &= \Omega_{\alpha\beta}(\delta\theta) \tilde{\varphi}_\beta \end{aligned} \quad (4.27)$$

En choisissant  $\delta\theta = \arctan[-\delta\lambda_2(1 + \delta\lambda_1)^{-1}]$  nous savons que nous obtenons une expression analogue à (4.13), c'est à dire sans coefficient hors-diagonal en  $i\omega$ . Ceci nous définit de nouvelles variations des paramètres, dont en particulier une nouvelle variation du paramètre  $\hat{\omega}_0$  donnée par :

$$\delta\hat{\omega}_0^{(1')} = \delta\hat{\omega}_0 C + (r + \delta r)S \quad (4.28)$$

où  $C = \cos\delta\theta$  et  $S = \sin\delta\theta$ . En définissant un deuxième champ intermédiaire  $\varphi_\alpha^{(2)}$  par :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{(2)}(\mathbf{q}, t) &= \Omega_{\alpha\beta}(\delta\hat{\omega}_0^{(1')}t) \varphi_\beta^{(1')}(\mathbf{q}, t) \\ \tilde{\varphi}_\alpha^{(2)}(\mathbf{q}, t) &= \Omega_{\alpha\beta}(\delta\hat{\omega}_0^{(1')}t) \tilde{\varphi}_\beta^{(1')}(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

nous éliminons le paramètre  $\delta\hat{\omega}_0^{(1')}$  de l'action. Les nouvelles variations des paramètres sont les mêmes que les variations intermédiaires précédentes et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \delta D^{(2)} = \delta D^{(1')} &= \delta D \\ \delta\lambda^{(2)} = \delta\lambda^{(1')} &= (C - 1) + \delta\lambda_1 C - \delta\lambda_2 S \\ \delta r^{(2)} = \delta r^{(1')} &= r(C - 1) + \delta r C - (\omega_0 + \delta\omega_0)S \\ \delta c^{(2)} = \delta c^{(1')} &= c(C - 1) + \delta c C - (c_a + \delta c_a)S \\ \delta c_a^{(2)} = \delta c_a^{(1')} &= c_a(C - 1) + \delta c_a C + (c + \delta c)S \\ \delta U_{\alpha\beta}^{(2)} = \delta U_{\alpha\beta}^{(1')} &= U_{\alpha\sigma}(\Omega_{\sigma\beta}(\delta\theta) - I_{\sigma\beta}) + \delta U_{\alpha\sigma} \Omega_{\sigma\beta}(\delta\theta) \end{aligned} \quad (4.30)$$

auxquelles il faut ajouter que l'on ne crée pas de variation associée au paramètre  $\hat{\omega}_0$ , ce qui peut s'écrire :  $\delta\hat{\omega}_0 = \delta\hat{\omega}_0^{(2)} = 0$ .

Nous définissons enfin les quantités renormalisées après dilatation d'échelle, de façon à ce que  $D$ ,  $\lambda$  et  $c$  soient conservées :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}' &= e^{\delta l} \mathbf{q} \\
 \omega' &= e^{2\delta l} Z'_\omega \omega \\
 \varphi'_\alpha(\mathbf{q}', \omega') &= e^{-\frac{d+6}{2}\delta l} \sqrt{Z'} \varphi_\alpha^{(2)}(\mathbf{q}, \omega) \\
 &= e^{-\frac{d+6}{2}\delta l} \sqrt{Z'} \left[ Op^r(\delta\widehat{\omega}_0^{(1')}t) \right]_{\alpha\beta} \varphi_\beta(\mathbf{q}, \omega) \\
 \widetilde{\varphi}'_\alpha(\mathbf{q}', \omega') &= e^{-\frac{d+2}{2}\delta l} \sqrt{\widetilde{Z}'} \widetilde{\varphi}_\alpha^{(2)}(\mathbf{q}, \omega) \\
 &= e^{-\frac{d+2}{2}\delta l} \sqrt{\widetilde{Z}'} \Omega_{\alpha\beta}(\delta\theta) \left[ Op^r(\delta\widehat{\omega}_0^{(1')}t) \right]_{\beta\sigma} \widetilde{\varphi}_\sigma(\mathbf{q}, \omega) \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

où la notation  $\left[ Op^r(\delta\widehat{\omega}_0^{(1')}t) \right]_{\alpha\beta}$  désigne l'opérateur transformé de Fourier de l'opérateur de rotation  $\Omega_{\alpha\beta}(\delta\widehat{\omega}_0^{(1')}t)$ . Les paramètres effectifs à l'échelle  $be^{\delta l}$  sont donnés par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 c(l + \delta l) &= c(l) & D(l + \delta l) &= D(l) & \lambda(l + \delta l) &= 1 \\
 c_a(l + \delta l) &= \left[ c_a(l) + \delta c_a^{(2)} \right] (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-1} \\
 r(l + \delta l) &= e^{2\delta l} \left[ r(l) + \delta r^{(2)} \right] (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-1} \\
 U_{\alpha\beta}(l + \delta l) &= e^{(4-d)\delta l} \left[ U_{\alpha\beta}(l) + \delta U_{\alpha\beta}^{(2)} \right] (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-2} (1 + \delta D^{(2)}/D) (1 + \delta \lambda^{(2)})^{-1} \\
 Z_\omega(l + \delta l) &= Z_\omega(l) (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-1} (1 + \delta \lambda^{(2)}) \\
 Z(l + \delta l) &= Z(l) (1 + \delta c^{(2)}/c)^3 (1 + \delta D^{(2)}/D)^{-1} (1 + \delta \lambda^{(2)})^{-1} \\
 \widetilde{Z}(l + \delta l) &= \widetilde{Z}(l) (1 + \delta c^{(2)}/c) (1 + \delta D^{(2)}/D) (1 + \delta \lambda^{(2)})^{-1}
 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Les évolutions respectives de la phase  $\theta$  et de la pulsation  $\widehat{\omega}_0$  sont données, quant à elles, par les équations découplées suivantes :

$$\begin{aligned}
 \theta(l + \delta l) &= \theta(l) + \delta\theta \\
 \widehat{\omega}_0(l + \delta l) &= e^{2\delta l} \left[ \widehat{\omega}_0(l) + \delta\widehat{\omega}_0^{(1')} \right] (1 + \delta c^{(2)}/c)^{-1} (1 + \delta \lambda^{(2)})
 \end{aligned} \quad (4.33)$$

où  $\delta\theta$  est donné par (4.14), et  $\delta\widehat{\omega}_0^{(1')}$  par (4.28).

### Equations de groupe de renormalisation

Pour les mêmes raisons que celles qui ont été exposées dans les paragraphes 4.1.1 et 4.2.4, l'évolution des paramètres en fonction de l'échelle est donnée par un système d'équations autonome, pour lequel l'évolution du logarithme des trois facteurs  $Z$ , de la phase  $\theta$  et de la pulsation  $\widehat{\omega}_0$  sont découplées. Après intégration de ce système, nous obtenons des lois de transformation pour les fonctions de corrélation et de réponse analogues à (4.20), (4.21) ou (4.22), mais tenant

compte cette fois-ci du fait que nous effectuons la renormalisation dans un référentiel oscillant à la fréquence effective qui est associée à l'échelle à laquelle on le regarde. La pulsation effective intervenant dans le résultat final est donnée par :

$$\omega_0(b) = b^{-2} Z_\omega(b)^{-1} \hat{\omega}_0(b) \quad (4.34)$$

Nous donnons tout d'abord l'expression de la renormalisation des fonctions à deux points de la théorie dans l'espace où elle est la plus simple, à savoir l'espace  $(\mathbf{q}, t)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\mathbf{q}, t) &= b^{\frac{d+2}{2}} \sqrt{Z(b)}^{-1} Z_\omega(b)^{-1} \Omega_{\alpha\beta}(-\omega_0(b)t) \varphi_\beta(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega(b)^{-1} t) \\ \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{q}, t) &= b^{\frac{d-2}{2}} \sqrt{\tilde{Z}(b)}^{-1} Z_\omega(b)^{-1} \Omega_{\alpha\beta}(-\theta(b) - \omega_0(b)t) \tilde{\varphi}_\beta(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega(b)^{-1} t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi) &= b^2 Z(b)^{-1} Z_\omega(b)^{-2} \Omega_{\alpha\sigma}(-\omega_0(b) \cdot (t_1 - t_2)) \\ &\quad G_{\sigma\beta}(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega(b)^{-1} (t_1 - t_2); \Pi') \\ \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi) &= \sqrt{Z(b) \tilde{Z}(b)}^{-1} Z_\omega(b)^{-2} \Omega_{\alpha\sigma}(+\theta(b) - \omega_0(b) \cdot (t_1 - t_2)) \\ &\quad \gamma_{\sigma\beta}(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega(b)^{-1} (t_1 - t_2); \Pi') \end{aligned} \quad (4.35)$$

L'expression des fonctions de corrélation et de réponse étant usuellement plus simples dans l'espace de Fourier, il sera très utile de disposer de ces lois de transformation dans cet espace. Pour cela, nous décomposons la loi de transformation en deux étapes. Nous définissons un jeu de champs intermédiaires par :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{(I)}(\mathbf{q}, t) &= b^{\frac{d+2}{2}} \sqrt{Z(b)}^{-1} Z_\omega(b)^{-1} \Omega_{\alpha\beta}(-\omega_0(b)t) \varphi_\beta(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega(b)^{-1} t) \\ \tilde{\psi}_\alpha^{(I)}(\mathbf{q}, t) &= b^{\frac{d-2}{2}} \sqrt{\tilde{Z}(b)}^{-1} Z_\omega(b)^{-1} \Omega_{\alpha\beta}(-\omega_0(b)t) \tilde{\varphi}_\beta(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega(b)^{-1} t) \end{aligned}$$

tels que les champs de départ soient donnés par :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha(\mathbf{q}, t) &= \psi_\beta^{(I)}(\mathbf{q}, t) \\ \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{q}, t) &= \Omega_{\alpha\beta}(-\theta(b)) \tilde{\psi}_\beta^{(I)}(\mathbf{q}, t) \end{aligned}$$

Dans ce cas nous pouvons écrire les relations entre les fonctions de corrélations et de réponse associées à ces champs intermédiaires et les fonctions renormalisées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C_{11}^{(I)}(\mathbf{q}, \omega; \Pi) &= b^4 Z^{-1} Z_\omega^{-1} \frac{1}{2} \left[ G_{11}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(\omega + \omega_0); \Pi') + G_{11}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(\omega - \omega_0); \Pi') \right. \\ &\quad \left. + i [G_{12}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(\omega + \omega_0); \Pi') - G_{12}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(\omega - \omega_0); \Pi')] \right] \\ C_{12}^{(I)}(\mathbf{q}, \omega; \Pi) &= b^4 Z^{-1} Z_\omega^{-1} \frac{1}{2} \left[ G_{12}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(\omega + \omega_0); \Pi') + G_{12}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(\omega - \omega_0); \Pi') \right. \\ &\quad \left. - i [G_{11}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(\omega + \omega_0); \Pi') - G_{11}(b\mathbf{q}, b^2 Z_\omega(\omega - \omega_0); \Pi')] \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Cette relation prend en compte les transformations de renormalisation habituelles, ainsi que le fait que le champ renormalisé est écrit dans un référentiel oscillant. A cela il faut ajouter la transformation de phase (4.36), qui se traduit sur les fonctions de corrélations par :

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega; \Pi) &= C_{\alpha\beta}^{(I)}(\mathbf{q}, \omega; \Pi) \\ \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega; \Pi) &= \Omega_{\alpha\sigma}(+\theta(b))\chi_{\sigma\beta}^{(I)}(\mathbf{q}, \omega; \Pi) \end{aligned}$$

Nous retrouvons le fait que cette phase n'intervient que dans l'expression de la fonction de réponse, ce qui confirme qu'elle représente physiquement une phase entre la variable dynamique à laquelle on s'intéresse et la force externe.

### 4.3.3 Comportements asymptotiques critiques

Nous avons donc montré que le paramètre  $\omega_0$ , quoi que de dimension positive par rapport aux transformations d'échelle, est effectivement non pertinent. En effet, nous pouvons trouver une transformation qui l'élimine de la dynamique et, par suite, des équations de groupe de renormalisation. Par conséquent, cette méthode prouve qu'il existe un point critique et un comportement critique associé, indépendamment de la valeur de ce paramètre. Le prix à payer est que le comportement critique ne peut se lire que dans le référentiel oscillant à la pulsation effective. Cette pulsation effective peut être calculée grâce à l'équation d'évolution obtenue par dérivation de (4.33). Dans le cas particulier du point fixe trouvé à l'aide de la première version du groupe de renormalisation (celle où l'on conservait la pulsation  $\omega_0$  dans le jeu de paramètres renormalisés ; voir paragraphe 4.2.5), cette pulsation effective est une loi de puissance décroissante vers zéro aux grandes échelles.

#### Définition d'une théorie effective dans un référentiel oscillant

Pour accéder au comportement critique, il nous faut considérer les lois de transformation des fonctions de corrélation d'une théorie dont nous ne tournons pas les champs à chaque échelle. Pour cela, nous définissons un champ  $\phi_\alpha$ , de telle façon que la théorie qui lui est associée n'oscille pas à l'échelle  $\Lambda/b$ , et ne contienne pas de rotation dans ses transformations de renormalisation. Pour cela, nous plaçons le champ  $\phi_\alpha$ , ainsi que son champ renormalisé  $\phi_\alpha^R$ , dans le référentiel oscillant à la pulsation  $\omega_0(b)$  :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(\mathbf{q}, t) &= \Omega_{\alpha\beta}(\omega_0(b)t)\psi_\beta(\mathbf{q}, t) \\ \tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{q}, t) &= \Omega_{\alpha\beta}(\theta(b) + \omega_0(b)t)\tilde{\psi}_\beta(\mathbf{q}, t) \\ \phi_\alpha^R(\mathbf{q}, t) &= \varphi_\alpha(\mathbf{q}, t) \\ \tilde{\phi}_\alpha^R(\mathbf{q}, t) &= \tilde{\varphi}_\alpha(\mathbf{q}, t) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Nous notons  $G[\phi]$  et  $\gamma[\phi]$  respectivement les fonctions de corrélation et de réponse associées à cette théorie, et nous avons les lois de transformation sui-

vantes :

$$\begin{aligned}
 \phi_\alpha(\mathbf{q}, t) &= b^{\frac{d+2}{2}} \sqrt{Z}^{-1} Z_\omega^{-1} \phi_\alpha^R(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega^{-1} t) \\
 \tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{q}, t) &= b^{\frac{d-2}{2}} \sqrt{\tilde{Z}}^{-1} Z_\omega^{-1} \tilde{\phi}_\alpha^R(b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega^{-1} t) \\
 G_{\alpha\beta}[\phi](\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi, b) &= b^2 Z^{-1} Z_\omega^{-2} G_{\alpha\beta}[\phi](b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega^{-1}(t_1 - t_2); \Pi') \\
 \gamma_{\alpha\beta}[\phi](\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi, b) &= \sqrt{Z\tilde{Z}}^{-1} Z_\omega^{-2} \gamma_{\alpha\beta}[\phi](b\mathbf{q}, b^{-2} Z_\omega^{-1}(t_1 - t_2); \Pi')
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

où nous avons explicitement mentionné la dépendance en  $b$  qui, pour cette théorie placée dans le référentiel oscillant à la pulsation  $\omega_0(b)$ , apparaît également implicitement dans le membre de gauche de l'équation. Puisqu'il n'y a pas de rotations dans ces lois de transformation, nous pouvons déduire les exposants critiques pour cette théorie par les techniques habituelles, et remonter au comportement critique de la théorie qui nous intéresse à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi) &= \Omega_{\alpha\sigma}(-\omega_0(b) \cdot (t_1 - t_2)) G_{\sigma\beta}[\phi](\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi, b) \\
 \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi) &= \Omega_{\alpha\sigma}(\theta(b) - \omega_0(b) \cdot (t_1 - t_2)) \gamma_{\sigma\beta}[\phi](\mathbf{q}, t_1 - t_2; \Pi, b)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

### Exposants critiques

Au point fixe du groupe de renormalisation, les dérivées des facteurs  $\ln Z(l)$  sont des constantes, si bien que les facteurs  $Z$  sont des lois de puissance en fonction de la variable  $b = e^l$ . Les exposants de ces lois de puissances définissent les exposants critiques de la théorie. Nous introduisons trois exposants  $z$ ,  $\eta$  et  $\tilde{\eta}$  associés aux trois lois d'échelle définies par les facteurs  $Z$  au point fixe de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 Z_\omega(b) &= b^{z-2} \\
 Z(b) &= b^{-2(z-2)+\eta} \\
 \tilde{Z}(b) &= b^{-2(z-2)+\tilde{\eta}}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

A ces trois exposants il convient d'ajouter l'exposant critique donné par la valeur propre de la direction instable du groupe de renormalisation linéarisé. Cet exposant critique, noté traditionnellement  $\nu$ , est par convention égal à l'inverse de cette valeur propre.

Avec ces définitions nous pouvons caractériser toutes les lois d'échelle critiques pour la théorie associée au champ  $\phi$  avec les méthodes usuelles. Nous notons  $\xi$  la longueur de corrélation et  $\tau$  le temps de corrélation (ou temps de relaxation) de la théorie ; nous avons les lois d'échelle suivantes :



A l'approche de la surface critique nous avons :

$$\begin{aligned} \xi &\propto \left(\frac{1}{\delta\tilde{r}}\right)^\nu & \tau &\propto \xi^z \\ G[\phi](\mathbf{q}=\mathbf{0}, \omega=0) &\propto \left(\frac{1}{\delta\tilde{r}}\right)^{\nu(2+z-\eta)} & \gamma[\phi](\mathbf{q}=\mathbf{0}, \omega=0) &\propto \left(\frac{1}{\delta\tilde{r}}\right)^{\nu(z-\frac{\eta+\tilde{\eta}}{2})} \end{aligned} \quad (4.41)$$

où  $\delta\tilde{r}$  est l'écart à la valeur critique de la composante du vecteur de l'espace des paramètres associé à notre théorie, selon la direction instable du système linéarisé des équations de groupe de renormalisation.

Sur la surface critique (ce qui correspond pour le système linéarisé à une valeur zéro de  $\delta\tilde{r}$ ), nous avons :

$$\begin{aligned} G[\phi](\mathbf{q}=\mathbf{0}, \omega) &\propto \left(\frac{1}{|\omega|}\right)^{\frac{2+z-\eta}{z}} & \gamma[\phi](\mathbf{q}=\mathbf{0}, \omega) &\propto \left(\frac{1}{|\omega|}\right)^{1-\frac{\eta+\tilde{\eta}}{2z}} \\ G[\phi](\mathbf{q}, \omega=0) &\propto \left(\frac{1}{q}\right)^{2+z-\eta} & \gamma[\phi](\mathbf{q}, \omega=0) &\propto \left(\frac{1}{q}\right)^{z-\frac{\eta+\tilde{\eta}}{2}} \\ G[\phi](\mathbf{x}=\mathbf{0}, t) &\propto \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{d-2+\eta}{z}} & \gamma[\phi](\mathbf{x}=\mathbf{0}, t) &\propto \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{z}(d+\frac{\eta+\tilde{\eta}}{2})} \\ G[\phi](\mathbf{x}, t=0) &\propto \left(\frac{1}{x}\right)^{d-2+\eta} & \gamma[\phi](\mathbf{x}, t=0) &\propto \left(\frac{1}{x}\right)^{d+\frac{\eta+\tilde{\eta}}{2}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Enfin la réponse statique à un champ homogène est non linéaire sur cette surface, et suit la loi d'échelle suivante :

$$\langle \phi \rangle \propto f^{1/\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{d-2+2z-\tilde{\eta}}{d-2+\eta} \quad \text{à faible force} \quad (4.43)$$

Les comportements (4.42) sont vrais asymptotiquement dans les limites respectives :  $\omega \rightarrow 0$ ,  $q = |\mathbf{q}| \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$  et  $x = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

#### 4.3.4 Identification des exposants critiques en champ moyen et comportement critique en dimension plus grande que 4

Les équations (3.23), (3.25) et (3.26) nous permettent d'identifier les quatre exposants critiques indépendants de la théorie champ moyen. Nous avons :

$$\nu^L = \frac{1}{2} \quad z^L = 2 \quad \eta^L = 0 \quad \tilde{\eta}^L = 0 \quad (4.44)$$

Nous pouvons à ce stade retrouver par un argument point fixe la valeur des exposants critiques en dimension d'espace supérieure à 4. En effet, comme nous l'avons dit dans le paragraphe 4.1.3, le point fixe gaussien est stable en dimension supérieure à 4, et les équations linéarisées autour de ce point fixe correspondent

aux dilatations d'échelles triviales. Dans ce cas, la valeur propre de la direction instable associée au paramètre de contrôle  $r$  est 2 d'après l'analyse dimensionnelle (4.5), et nous avons donc  $\nu = 1/2$ . De plus, à ce point fixe, les champs et le temps se transforment simplement selon leurs dimensions canoniques (équation (4.5)). Les trois facteurs  $Z$  de la théorie sont alors trivialement égaux à 1 au point fixe, et les équations (4.40) nous donnent  $z = 2$  et  $\eta = \tilde{\eta} = 0$ .

#### 4.3.5 Une nouvelle renormalisation du modèle $O(2)$

Nous avons vu dans la section 2.4 que, dans le cas particulier où les coefficients  $c_a$  et  $u_a$  sont nuls, notre théorie, écrite dans le référentiel oscillant à la fréquence  $\omega_0$ , correspondait exactement au modèle  $O(2)$  dynamique. Par conséquent, notre seconde méthode de renormalisation, qui utilise l'élimination du paramètre  $\omega_0$ , doit se réduire exactement au groupe de renormalisation du modèle  $O(2)$  dans ce cas particulier. En particulier,  $\omega_0(b)$  et  $\theta(b)$  ne doivent pas être renormalisés, et la relation (2.55) correspondant au théorème Fluctuation-Dissipation doit être vérifiée par la théorie associée au champ  $\phi$  (défini par (4.37)).

La première propriété peut-être constatée simplement en considérant les équations (4.33). Nous constatons sur l'action (4.26), que dans ce cas  $\delta\lambda_2 = \delta\hat{\omega}_0 = \delta c_a = 0$ , et que par conséquent  $\delta\theta$  et  $\delta\hat{\omega}_0^{(1')}$ , donnés par  $\delta\theta = \arctan[-\delta\lambda_2(1 + \delta\lambda_1)^{-1}]$  et (4.28), sont nuls. Nous remarquons que dans l'expression (4.33), il reste une renormalisation non triviale pour  $\hat{\omega}_0$ . En réalité, celle-ci est simplement liée à la renormalisation du temps, et disparaît lorsque l'on exprime la quantité physique dans les unités d'origines (voir l'expression de  $\delta\omega_0(b)$  dans (4.35)).

La seconde propriété est structurellement absente du groupe de renormalisation général pour les oscillateurs couplés. Dans le cas particulier où  $c_a$  et  $u_a$  sont nuls, la relation Fluctuation-Dissipation doit avoir lieu pour la théorie associée au champ  $\phi$  à toute échelle. Ainsi les lois de transformations (4.38) imposent la relation suivante entre les facteurs  $Z$  que nous avons définis :

$$Z_\omega \sqrt{\frac{Z}{\tilde{Z}}} = 1 \quad (4.45)$$

En termes de la renormalisation des paramètres de l'action (4.26), la relation s'écrit :

$$\delta\lambda_1 = \frac{\delta D}{D} \quad (4.46)$$

ce qui est une conséquence de la relation suivante entre les dérivées de la fonctionnelle  $\Gamma$  [150, 129] :

$$\Gamma^{(2,0)}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{2D}{\omega} \text{Im}\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{q}, \omega) \quad (4.47)$$

Cette symétrie de la théorie d'équilibre  $O(2)$ , absente dans notre cas, impose des relations entre les diagrammes de Feynman à tout ordre en théorie des perturbations. En particulier, ce modèle possède un exposant critique indépendant

de moins par rapport à celui des oscillateurs couplés. En effet, la relation (4.45), accompagnée des lois d'échelle (4.40), impose :

$$z = 2 + \frac{1}{2}(\tilde{\eta} - \eta) \quad (4.48)$$

Dans le cas du modèle  $O(2)$ , il est usuel d'écrire la dynamique, non pas sous la forme (2.50), mais en introduisant le coefficient  $D$  explicitement dans la dynamique :

$$\partial_t \varphi_\alpha = -D \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi_\alpha} + \zeta_\alpha \quad (4.49)$$

On remarquera que ceci sous-entend un choix d'unités d'énergies telles que  $k_B T = 1$ , ce qui est validé par le fait qu'au voisinage du point critique,  $k_B T \sim k_B T_c$  est approximativement constant. Dans cette écriture, qui est naturelle dans ce cadre, nous constatons que nous pouvons absorber le coefficient  $D$  dans une redéfinition des échelles de temps. Le schéma de renormalisation habituel [150, 129], qui ne renormalise pas les échelles de temps mais le coefficient  $D$ , est donc bien équivalent au nôtre. Notre choix, qui consiste à garder  $D$  constant et à renormaliser le temps, est motivé par les deux raisons suivantes : tout d'abord l'absence de théorème Fluctuation-Dissipation rend artificielle une écriture sous la forme  $\partial_t \psi_\alpha = D F_\alpha[\psi] + \eta_\alpha$ , qui serait la généralisation de (4.49) à notre théorie. D'autre part, le fait de renormaliser le temps et d'imposer au coefficient  $D$  de rester constant sous renormalisation nous permet de comprendre de façon naturelle le fait que la condition point fixe sur la surface critique ne dépende que des trois coefficients  $u$ ,  $u_a$  et  $c_a$ . En particulier, les équations de Callan-Symanzik que nous établirons dans la section suivante mènent à une condition point fixe correspondant à l'annulation de *toutes* les fonctions qui sont en facteur devant les dérivées partielles des fonctions de corrélation par rapport aux coefficients de la théorie. La méthode qui comporte une renormalisation du coefficient  $D$ , quant à elle, mène à des équations comportant une dérivée partielle par rapport à ce paramètre et qui n'influence pas la condition point fixe. Cette dépendance en  $D$  permet, dans ce schéma, de dériver les lois asymptotiques temporelles. Dans notre cas, nous avons à la place des dérivées par rapport aux fréquences dont dépendent les fonctions de corrélations de la théorie. Les fonctions qui sont en facteur renormalisent alors directement les échelles de fréquences (ou de temps).

## 4.4 Schéma de renormalisation de Callan-Symanzik

Nous justifierons en conclusion du Chapitre 5 que le calcul à l'ordre d'une boucle est insuffisant pour connaître qualitativement la structure complète du groupe de renormalisation. La technique de renormalisation de Wilson, bien que physiquement intuitive et techniquement idéale pour les calculs de renormalisation à l'ordre d'une boucle, est techniquement inadaptée aux calculs de renormalisation d'ordre élevé. En effet, à cause de la conservation de l'impulsion dans les vertex de la théorie (voir Annexe C), la topologie des intégrales de Feynman sur une couche d'impulsions devient complexe dès lors qu'il y a plus d'une boucle d'intégration. Il nous faudra donc changer de technique pour le calcul à l'ordre de deux boucles, et nous utiliserons la technique de renormalisation menant aux équations de Callan et Symanzik. Nous introduisons ici rapidement les grandes lignes de cette technique dans un cadre général. Les lecteurs familiers avec la technique peuvent donc ignorer cette section.

La technique de renormalisation de Callan et Symanzik part de la même constatation que la technique de Wilson, à savoir que l'intégrale fonctionnelle du formalisme de théorie des champs (dans notre cas l'équation (2.18)) mène à une théorie dont la série perturbative diverge. La technique de Wilson résolvait le problème en introduisant une coupure dans l'espace des impulsions, et des paramètres effectifs décrivant la théorie à l'échelle associée à cette coupure. Nous calculons ensuite la relation entre les paramètres décrivant la théorie à différentes échelles, et le point critique était cherché comme point fixe de cette procédure. Dans la technique de Callan-Symanzik, nous cherchons à réécrire la théorie de départ, aussi appelée théorie nue dans ce cadre, en termes de nouveaux paramètres et champs, appelés grandeurs renormalisées, définis de telle sorte que la série perturbative associée à cette nouvelle théorie renormalisée soit finie. Nous pouvons aisément nous convaincre qu'il nous suffit de renormaliser les vertex propres de la théorie pour que toute la série perturbative soit finie<sup>15</sup>. La redéfinition des paramètres s'effectue de façon cohérente ordre par ordre en théorie des perturbations. En particulier, à ordre donné de la théorie des perturbations, les divergences primitives associées aux sous-diagrammes stricts d'un graphe donné ne sont pas à considérer, car elles ont été absorbées par les redéfinitions des paramètres aux ordres inférieurs. La démonstration de la cohérence du schéma de renormalisation est due à Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann, et ce schéma est connu sous le nom de schéma de renormalisation BPHZ [2, 91]. La redéfinition des paramètres dépend d'une échelle de longueur attachée à la théorie renormalisée, notamment parce que la constante de couplage de la théorie est dimensionnée. Nous définissons donc, pour chaque échelle de longueur à laquelle nous décrivons le système, une théorie renormalisée différente. Nous retrouvons là les idées déjà exposées dans le cadre de la technique de Wilson. L'invariance de la théorie nue par rapport à cette échelle (introduite uniquement dans la théorie renormalisée) nous mène aux équations de Callan-Symanzik, qui sont des équations aux dérivées partielles pour les fonctions vertex de la théorie

<sup>15</sup>C'est à dire rendre l'expression des diagrammes qui interviennent dans le développement perturbatif finie en fonction des nouveaux paramètres.

renormalisée, et qui décrivent leur évolution en fonction de l'échelle. La solution de ces équations nous donne des expressions analogues à (4.38) et (4.39), qui nous permettent de déduire le comportement de ces fonctions dans le régime critique pour la théorie renormalisée. Les théories nues et renormalisées ne diffèrent que par un facteur multiplicatif constant, et les comportements ainsi obtenus seront valables pour la théorie nue, qui est la théorie physique. Au *point fixe* des équations de groupe de renormalisation, la solution de ces équations s'écrit sous forme de fonctions puissances, et nous retrouvons les lois d'échelles (4.41) et (4.42).

Pour notre étude, nous utilisons la technique dans le cadre du "schéma minimal" de renormalisation. Le terme de "masse", ou terme constant de  $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}$  avec les notations propres à notre étude, est traité perturbativement, et n'est donc pas pris en compte dans le propagateur de la théorie. L'idée sous-jacente est l'on cherche à comprendre le comportement critique de la théorie, c'est à dire proche d'une valeur zéro de ce paramètre ; ceci valide l'approche perturbative. Techniquement, cela introduit de nouveaux diagrammes dans la série perturbative de la théorie, qui nous permettent de ne pas considérer les divergences associées au terme constant de  $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2)}$ . En particulier, les diagrammes en dits en "tadpole" de la théorie, c'est à dire les diagrammes comportant un vertex "bouclé" sur lui-même, sont ignorés. Dans ce cas la série perturbative ainsi définie est finie en dimension inférieure à  $d = 4$ . Nous pouvons donc effectuer les calculs en dimension  $d = 4 - \varepsilon$ , les intégrales étant définies en dimension non-entière par prolongement analytique. En particulier, nous pouvons nous affranchir d'introduire une coupure dans les intégrales, et nous comprenons que le problème topologique posé par la méthode de Wilson soit levé. Les paramètres renormalisés sont définis de telle sorte qu'ils absorbent exactement les pôles en  $\varepsilon = 4 - d$  des intégrales de Feynman de la théorie, et la théorie renormalisée est ainsi parfaitement définie en dimension 4 et supérieure à 4. L'absence de terme de masse dans le propagateur de la théorie a pour effet de mener à des calculs simplifiés des intégrales de Feynman. Toutefois, l'évaluation de ces intégrales en dimension  $d = 4 - \varepsilon$  constitue une étape techniquement lourde, et c'est pourquoi la technique de Wilson a été choisie pour le calcul à l'ordre d'une boucle.

## 4.5 Renormalisation des oscillateurs couplés dans le schéma de Callan-Symanzik

Techniquement différente, la renormalisation par la méthode de Callan Symanzik exploite les mêmes idées physiques que la méthode de Wilson. Dans le cadre qui nous est spécifique, nous devons donc retrouver avec cette nouvelle méthode les idées propres à notre calcul, et exposées dans les sections 4.2 et 4.3. Nous devons donc retrouver la nécessité d'introduire une phase relative entre le champ auxiliaire de la théorie renormalisée et celui de la théorie nue, ainsi que les deux façons de renormaliser la théorie, en gardant ou en éliminant la pulsation  $\omega_0$  du jeu de paramètres que l'on renormalise. Les idées physiques relatives à ces principes ayant été exposées en détail dans le cadre de la technique de Wilson, nous nous contentons ici d'expliquer comment nous devons les

implémenter techniquement dans le cadre du schéma de Callan-Symanzik. En particulier, nous savons que pour obtenir le point fixe d'une transition vers une phase oscillante dans le cas général, il nous faut éliminer le paramètre  $\omega_0$  des équations de groupe de renormalisation. Nous présentons donc en détails cette manière de renormaliser la théorie. Toutefois, si l'on garde  $\omega_0$  dans le jeu de paramètres renormalisés, nous obtenons une autre structure des équations de Callan-Symanzik avec un terme supplémentaire associé à ce paramètre pertinent. Aussi présentons nous la structure du groupe de renormalisation obtenue lorsque l'on garde ce paramètre dans le dernier paragraphe de cette section.

#### 4.5.1 Théorie nue

Notre point de départ est la fonctionnelle génératrice (2.26) écrite en transformée de Fourier. Elle définit la théorie nue, et nous la notons avec des indices  $(0)$ . Nous avons :

$$Z^{(0)} [\tilde{J}_\alpha^{(0)}, J_\alpha^{(0)}] = \int \mathcal{D} [\psi_\alpha^{(0)}] \mathcal{D} [-i\tilde{\psi}_\alpha^{(0)}] \exp \left\{ \mathcal{S}^{(0)} [\tilde{\psi}_\alpha^{(0)}, \psi_\alpha^{(0)}] + \int_{k^{(0)}} [\tilde{J}_\alpha^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} + J_\alpha^{(0)} \psi_\alpha^{(0)}] \right\} \quad (4.50)$$

avec

$$\mathcal{S}^{(0)} [\tilde{\psi}_\alpha^{(0)}, \psi_\alpha^{(0)}] = \int_{k^{(0)}} \left\{ D \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} - \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} [i\omega \delta_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}^{(0)}(-\mathbf{q})] \psi_\beta \right\} - \int_{k_1^{(0)}, k_2^{(0)}, k_3^{(0)}} U_{\alpha\beta}^{(0)} \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} \psi_\beta^{(0)} \psi_\gamma^{(0)} \psi_\gamma^{(0)} \quad (4.51)$$

où

$$R_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{q}) = R_{\alpha\beta}^{(0)}(-\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} r^{(0)} + c\mathbf{q}^2 & -(\omega_0^{(0)} + c_a^{(0)} \mathbf{q}^2) \\ \omega_0^{(0)} + c_a^{(0)} \mathbf{q}^2 & r^{(0)} + c\mathbf{q}^2 \end{pmatrix} \\ U_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} u^{(0)} & -u_a^{(0)} \\ u_a^{(0)} & u^{(0)} \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

#### 4.5.2 Elimination du paramètre $\omega_0$

A l'aide d'une transformation analogue à (2.43), nous éliminons  $\omega_0^{(0)}$  de la théorie nue. Nous définissons une nouvelle théorie associée à un champ  $\varphi_\alpha^{(0)}$  et son champ auxiliaire  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}$ , qui se situent dans un référentiel oscillant à la fréquence  $\omega_0^{(0)}$  :

$$\varphi_\alpha^{(0)}(\mathbf{x}, t^{(0)}) = \Omega_{\alpha\beta}(\omega_0^{(0)} t^{(0)}) \psi_\beta^{(0)}(\mathbf{x}, t^{(0)}) \\ \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}(\mathbf{x}, t^{(0)}) = \Omega_{\alpha\beta}(\omega_0^{(0)} t^{(0)}) \tilde{\psi}_\beta^{(0)}(\mathbf{x}, t^{(0)}) \quad (4.53)$$

avec

$$\Omega_{\alpha\beta}(\omega_0 t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & -\sin(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

La fonctionnelle génératrice associée aux champs  $\varphi_\alpha^{(0)}$  et  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}$  a une expression analogue à (4.50). Dans le cadre du schéma minimal perturbatif, nous traitons la partie quartique dans les champs perturbativement, comme nous le faisons avec la méthode de Wilson. En revanche, ce qui est nouveau ici est le fait que nous traitons également le terme de masse perturbativement. Nous préférons donc réécrire l'action en la décomposant de la façon suivante :

$$\mathcal{S}^{(0)} = \mathcal{S}_0^{(0)} + \mathcal{S}_{\text{int}}^{(0)} + \mathcal{S}_{\text{per}}^{(0)} \quad (4.55)$$

Cette action comporte une partie dite “libre” :

$$\mathcal{S}_0^{(0)} [\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}, \varphi_\alpha^{(0)}] = \int_{\mathbf{q}, \omega^{(0)}} \left\{ D \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} - \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} [i\omega^{(0)} + c\mathbf{q}^2] \varphi_\alpha^{(0)} - \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} [c_a^{(0)} \mathbf{q}^2] \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi_\beta^{(0)} \right\} \quad (4.56)$$

une partie dite d’“interaction” :

$$\mathcal{S}_{\text{int}}^{(0)} [\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}, \varphi_\alpha^{(0)}] = - \int_{k_1, k_2, k_3} U_{\alpha\beta}^{(0)} \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} \varphi_\beta^{(0)} \varphi_\gamma^{(0)} \varphi_\gamma^{(0)} \quad (4.57)$$

et enfin la partie qui sera traitée perturbativement :

$$\mathcal{S}_{\text{per}}^{(0)} [\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}, \varphi_\alpha^{(0)}] = - \int_{\mathbf{q}, \omega} r^{(0)} \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} \varphi_\alpha^{(0)} \quad (4.58)$$

### 4.5.3 Diagrammes superficiellement divergents

La partie  $\mathcal{S}_{\text{per}}^{(0)}$  de l'action nous introduit un facteur  $[\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} \varphi_\alpha^{(0)}]$  dans le développement perturbatif des dérivées de la fonctionnelle  $\Gamma$ . Nous avons vu qu'il nous suffit de renormaliser les vertex propres de la théorie pour rendre la série perturbative finie. Nous devons donc, dans le cas général, considérer le diagramme  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}$ , qui comporte  $\tilde{N}$  pattes externes  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}$ ,  $N$  pattes externes  $\varphi_\alpha^{(0)}$ , et  $L$  insertions de l'opérateur  $[\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} \varphi_\alpha^{(0)}]$  (ou correspondant au terme perturbatif d'ordre  $L$  dans le développement en puissances de  $[r^{(0)} \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} \varphi_\alpha^{(0)}]$  de  $\Gamma^{(\tilde{N}, N)}$ ).  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}$  sera parfois noté  $\Gamma^{(M, L)}$  où  $M = \tilde{N} + N$  lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. Pour un graphe donné, nous notons :

$V$  le nombre de vertex

$\tilde{N}$  (resp.  $N$ ) le nombre de pattes externes  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}$  (resp.  $\varphi_\alpha^{(0)}$ )

$L$  le nombre d'insertions de l'opérateur  $[\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} \varphi_\alpha^{(0)}]$

Dans le cadre du schéma BPHZ, seules les divergences globales dans le diagramme, qui peuvent être déduites par analyse dimensionnelle, sont à considérer. Nous pouvons caractériser le degré de ces divergences en calculant le “degré superficiel de divergence”  $\delta$  du diagramme. Il est donné par la formule suivante :

$$\delta = (d-4)V - \frac{d+2}{2}\tilde{N} - \frac{d-2}{2}N - 2L + d + 2 \quad (4.59)$$

ce qui donne, lorsque  $d = 4 - \varepsilon$  :

$$\delta = -3\tilde{N} - N - 2L + 6 + \varepsilon \left( \frac{\tilde{N} + N}{2} - 1 \right) - \varepsilon V \quad (4.60)$$

Nous savons que nous devons ignorer les divergences relatives au terme constant de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,0)}$ , puisque celles-ci sont prises en compte perturbativement par l'insertion du facteur  $[\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} \varphi_\alpha^{(0)}]$  provenant du terme  $\mathcal{S}_{\text{per}}^{(0)}$  dans l'action. Nous devons donc renormaliser les divergences associées aux vertex propres suivants :  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4,0)}$ ,  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2,0)}$  et  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,1)}$  pour leur terme constant, et  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,0)}$  pour ses termes linéaires en  $i\omega$  et  $\mathbf{q}^2$ . Tous ces termes perturbatifs ont un degré superficiel de divergence égal à zéro en dimension 4. Ils sont convergents en dimension  $d = 4 - \varepsilon$ , et les paramètres renormalisés seront définis de façon à absorber les pôles des intégrales en  $\varepsilon^{-1}$ .

#### 4.5.4 Théorie renormalisée et contre-termes

Nous commençons par introduire les constantes de couplage sans dimension  $g^{(0)}$  et  $g_a^{(0)}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \mu^\varepsilon g^{(0)} = \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} g^{(0)} \\ u_a^{(0)} &= \mu^\varepsilon g_a^{(0)} = \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} g_a^{(0)} \end{aligned} \quad (4.61)$$

où  $\mu$  est une échelle de moment (ou de masse), a priori arbitraire, dont dépend la nouvelle théorie ainsi définie<sup>16</sup>. Les quantités renormalisées sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{(0)} &= \varphi_\alpha^{(1)} = \sqrt{\tilde{Z}} \varphi_\alpha^{(2)} \\ \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)} &= \Omega_{\alpha\beta}(-\theta) \tilde{\varphi}_\beta^{(1)} = \Omega_{\alpha\beta}(-\theta) \sqrt{\tilde{Z}} \tilde{\varphi}_\beta^{(2)} \\ g^{(0)} &= Z_u \sqrt{\tilde{Z} Z^3}^{-1} g \\ g_a^{(0)} &= Z_{u_a} \sqrt{\tilde{Z} Z^3}^{-1} g_a \\ r^{(0)} &= r_c^{(0)} + Z_r r \\ \omega^{(0)} &= Z_\omega \omega \\ c_a^{(0)} &= Z_{c_a} c_a \end{aligned} \quad (4.62)$$

où  $\Omega_{\alpha\beta}(\theta)$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta$ .  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(2)}$  et  $\varphi_\alpha^{(2)}$  ne sont pas encore les champs renormalisés définitifs. Nous voulons en effet, comme nous l'avons fait dans le cadre de la méthode de Wilson, que les champs  $\tilde{\varphi}_\alpha$  et  $\varphi_\alpha$  suivent l'évolution du paramètre  $\omega_0$  par renormalisation, de façon à ce que celui-ci n'apparaisse jamais dans l'action associée à ces champs. Pour les définir, nous plaçons la théorie renormalisée dans un nouveau référentiel tournant de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \Omega_{\alpha\beta}(\delta\omega_0 t) \varphi_\beta^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \tilde{\varphi}_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \Omega_{\alpha\beta}(\delta\omega_0 t) \tilde{\varphi}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4.63)$$

<sup>16</sup>L'introduction du paramètre  $\mu' = \mu\sqrt{4\pi}$  est justifiée par des raisons purement techniques.



L'action nue (4.55) peut alors se décomposer comme suit :

$$\mathcal{S}^{(0)} \left[ \tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}, \varphi_\alpha^{(0)} \right] = \mathcal{S} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha] + \delta\mathcal{S} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha] + \mathcal{S}_{\text{per}} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha] \quad (4.64)$$

où  $\mathcal{S} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha]$  représente l'action de la théorie renormalisée,  $\mathcal{S}_{\text{per}} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha]$  la partie de l'action traitée en perturbations (mais cette fois-ci écrite en termes des grandeurs renormalisées), et  $\delta\mathcal{S} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha]$  la partie de l'action regroupant les "contre-terme". Ce sont eux qui seront calculés de manière à absorber les pôles en  $\varepsilon^{-1}$  des intégrales de Feynman. Nous avons les expressions suivantes :

L'action renormalisée s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha] = & \int_{\mathbf{q}, \omega} \left\{ D \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha - \tilde{\varphi}_\alpha [i\omega + c\mathbf{q}^2] \varphi_\alpha - \tilde{\varphi}_\alpha [c_a \mathbf{q}^2] \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi_\beta \right\} \\ & - \int_{k_1 k_2 k_3} \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} g_{\alpha\beta} \tilde{\varphi}_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \varphi_\gamma \end{aligned} \quad (4.65)$$

L'action des contre-terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha] = & \int_{\mathbf{q}, \omega} \left\{ D (Z_\omega \tilde{Z} - 1) \tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\alpha \right. \\ & - \tilde{\varphi}_\alpha \left[ i\omega (Z_\omega^2 \sqrt{Z\tilde{Z}} \cos \theta - 1) + c\mathbf{q}^2 (Z_\omega \sqrt{Z\tilde{Z}} \cos \theta - Z_\omega \sqrt{Z\tilde{Z}} Z_{c_a} \frac{c_a}{c} \sin \theta - 1) \right] \varphi_\alpha \\ & - \tilde{\varphi}_\alpha \left[ i\omega (Z_\omega^2 \sqrt{Z\tilde{Z}} \sin \theta) + c_a \mathbf{q}^2 (Z_\omega \sqrt{Z\tilde{Z}} Z_{c_a} \cos \theta + Z_\omega \sqrt{Z\tilde{Z}} \frac{c}{c_a} \sin \theta - 1) \right] \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi_\beta \left. \right\} \\ & - \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} \int_{k_1 k_2 k_3} \left\{ [(Z_u Z_\omega^3 \cos \theta - 1)g - Z_{u_a} Z_\omega^3 \sin \theta g_a] \tilde{\varphi}_\alpha \varphi_\alpha \varphi_\gamma \varphi_\gamma \right. \\ & \left. + [(Z_{u_a} Z_\omega^3 \cos \theta - 1)g_a + Z_u Z_\omega^3 \sin \theta g] \varepsilon_{\alpha\beta} \tilde{\varphi}_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \varphi_\gamma \right\} \end{aligned} \quad (4.66)$$

Et enfin l'action associée aux termes de masse, et qui est traitée en perturbations :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{per}} [\tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_\alpha] = & \int_{\mathbf{q}, \omega} \left\{ -\tilde{\varphi}_\alpha \varphi_\alpha \sqrt{Z\tilde{Z}} Z_\omega (r Z_r \cos \theta) \right\} \\ & + \int_{\mathbf{q}, \omega} \left\{ -\tilde{\varphi}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \varphi_\beta \sqrt{Z\tilde{Z}} Z_\omega [-\delta\omega_0 + r Z_r \sin \theta] \right\} \end{aligned} \quad (4.67)$$

Nous remarquons que, techniquement, la rotation (4.63) introduit un contre-terme  $\delta\omega_0$  qui permettra l'absorption des divergences hors-diagonales de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)}$ .

Suivant les idées du paragraphe 4.3.3, nous définissons les champs  $\phi_\alpha$  et  $\tilde{\phi}_\alpha$  en termes desquels la théorie effective n'oscille pas à l'échelle considérée et ne contient pas de rotations dans sa renormalisation. Pour cela, nous introduisons une pulsation effective  $\omega_0$ , qui dépend de l'échelle arbitraire  $\mu'$ , et qui joue un rôle similaire à celui réservé à  $\omega_0(b)$ , défini dans les paragraphes 4.3.1 et 4.3.2 dans le cadre de la méthode de Wilson<sup>17</sup> :

$$\omega_0 = Z_\omega^{-1} \omega_0^{(0)} + \delta\omega_0 = Z_\omega^{-1} (\omega_0^{(0)} + \delta\tilde{\omega}_0) = Z_\omega^{-1} \tilde{\omega}_0 \quad (4.68)$$

---

<sup>17</sup>Nous reviendrons sur les similarités et différences entre des deux paramètres dans le chapitre 7.

Nous définissons une théorie associée aux champs  $\phi_\alpha$  et  $\tilde{\phi}_\alpha$ , qui se trouve dans le référentiel oscillant à la pulsation effective renormalisée  $\omega_0$ , et possédant un décalage de phase  $\theta$  en termes du champ auxiliaire. Nous plaçons également la théorie nue associée dans le référentiel oscillant à la fréquence  $\omega_0$ , de façon à ce que les transformations de groupe de renormalisation liées à cette théorie ne fasse pas intervenir de rotations. En particulier, les équations de Callan-Symanzik associées à ces champs  $\phi_\alpha$  et  $\tilde{\phi}_\alpha$  ne feront pas intervenir ces paramètres. Nous avons :

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^{(0)}(\mathbf{x}, t^{(0)}) &= \Omega_{\alpha\beta}(\tilde{\omega}_0 t^{(0)})\psi_\beta^{(0)}(\mathbf{x}, t^{(0)}) \\ \tilde{\phi}_\alpha^{(0)}(\mathbf{x}, t^{(0)}) &= \Omega_{\alpha\beta}(\tilde{\omega}_0 t^{(0)} + \theta)\tilde{\psi}_\beta^{(0)}(\mathbf{x}, t^{(0)}) \\ \phi_\alpha &= \varphi_\alpha \\ \tilde{\phi}_\alpha &= \tilde{\varphi}_\alpha\end{aligned}\tag{4.69}$$

Les équations de Callan-Symanzik associés à cette théorie permettent de calculer les fonctions vertex pour la théorie renormalisée liée au champ  $\phi_\alpha$ , et nous avons accès à ces mêmes fonctions pour la théorie qui nous intéresse grâce à des transformations de rotation analogues à (4.38). Ces transformations font intervenir les paramètres renormalisés  $\omega_0$  et  $\theta$  introduits respectivement en (4.62) et (4.68), et qui dépendent de l'échelle arbitraire  $\mu'$ .

#### 4.5.5 Equations de Callan-Symanzik

Nous notons  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}[\phi]$  les vertex propres de la théorie associées aux champs  $\phi_\alpha$  et  $\tilde{\phi}_\alpha$ . Cette théorie possède des fonctions de corrélation qui ne contiennent pas les paramètres  $\omega_0$  et  $\theta$ . En effet, toute la dépendance dans ces paramètres a été absorbée dans la définition du référentiel dans lequel est écrite la théorie. Nous notons  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}[\phi](k_{\{i(j)\}}, \bar{k}_{\{l\}}; c, c_a, g, g_a, r, \mu')$  le vertex propre de cette théorie, et construit avec  $L$  insertions de :

$$-rZ_r\sqrt{\tilde{Z}\tilde{Z}}Z_\omega\left[\tilde{\phi}_\alpha\phi_\alpha\cos\theta+\tilde{\phi}_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\phi_\beta\sin\theta\right]$$

qui possèdent les impulsions entrantes  $\bar{k}_{\{l\}}$  (voir la construction des diagrammes dans le chapitre 6). Les vertex propres  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}[\phi]$  dépendent de trois jeux d'impulsions :  $k_{\{i\}}$ ,  $k_{\{j\}}$  et  $\bar{k}_{\{l\}}$ .  $i$  varie entre 1 et  $\tilde{N}$ ,  $j$  entre  $\tilde{N}+1$  et  $\tilde{N}+N$ , et  $l$  entre 1 et  $L$ . La notation  $k_{\{i(j)\}}$  désigne l'ensemble des jeux d'impulsions  $\{k_{\{i\}}, k_{\{j\}}\}$ . Le vertex propre renormalisé  $\Gamma^{(\tilde{N}, N)}[\phi]$ , qui contient tous les ordres perturbatifs dans le terme de masse, est alors donné par :

$$\Gamma^{(\tilde{N}, N)}[\phi](k_{\{i(j)\}}; c, c_a, g, g_a, r, \mu') = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{r^L}{L!} \Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}[\phi](k_{\{i(j)\}}, \bar{k}_{\{l\}} = 0; c, c_a, g, g_a, r = 0, \mu')\tag{4.70}$$

Nous avons les relations suivantes entre les théories nues et renormalisées :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(\tilde{N}, N)}[\phi](k_{\{i(j)\}}; c, c_a, g, g_a, r, \mu') &= \\ Z_\omega^{\tilde{N}+N} \tilde{Z}^{\tilde{N}/2} Z^{N/2} \Gamma_0^{(\tilde{N}, N)}[\phi^{(0)}](k_{\{i(j)\}}^{(0)}; c, c_a^{(0)}, u^{(0)}, u_a^{(0)}, r^{(0)}) & \\ \Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}[\phi](k_{\{i(j)\}}, \bar{k}_{\{l\}}; c, c_a, g, g_a, r, \mu') &= \\ Z_\omega^{\tilde{N}+N} \tilde{Z}^{\tilde{N}/2} Z^{N/2} Z_r^L \Gamma_0^{(\tilde{N}, N, L)}[\phi^{(0)}](k_{\{i(j)\}}^{(0)}, \bar{k}_{\{l\}}^{(0)}; c, c_a^{(0)}, u^{(0)}, u_a^{(0)}, r^{(0)}) & \end{aligned} \quad (4.71)$$

Nous savons que les fonctions vertex contiennent systématiquement un facteur  $(2\pi)^{d+1} \delta^{d+1}(\sum_{i,j} k_{i(j)})$  lié à l'invariance par translation. Pour étudier les comportements des fonctions de corrélations, nous préférons éliminer ce facteur trivial. Notamment cela nous permet de retrouver plus simplement les expressions obtenues dans le cadre de la technique de Wilson pour la renormalisation des fonctions à deux points de la théorie. Nous notons  $\hat{\Gamma}$  ces fonctions réduites. Elles obéissent presque aux mêmes relations que celles écrites juste au-dessus, à ceci près que le facteur  $Z_\omega$  se trouve maintenant à la puissance  $\tilde{N} + N - 1$  au lieu de  $\tilde{N} + N$ .

Nous écrivons maintenant que la dérivée totale des fonctions vertex de la théorie nue par rapport à l'échelle arbitraire  $\mu'$  (introduite dans la théorie renormalisée) est identiquement nulle. Cela nous mène aux équations de Callan-Symanzik, écrites en termes des fonctions vertex réduites associées au champ  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu'} + \beta \frac{\partial}{\partial g} + \beta_a \frac{\partial}{\partial g_a} + \rho_{c_a} \frac{\partial}{\partial c_a} + \sum_{i(j)=1}^{\tilde{N}(N)} \bar{\gamma}_{\omega_{i(j)}} \frac{\partial}{\partial \omega_{i(j)}} - \gamma_r \frac{\partial}{\partial \ln r} - \right. \\ \left. - (\tilde{N} + N - 1) \gamma_\omega - \frac{\tilde{N}}{2} \tilde{\gamma} - \frac{N}{2} \gamma \right] \hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{a}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, c_a, g, g_a, r, \mu') = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

avec les définitions :

$$\begin{aligned} \beta(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{dg}{d \ln \mu'} \Big|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}} & \beta_a(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{dg_a}{d \ln \mu'} \Big|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}} \\ \rho_{c_a}(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{dc_a}{d \ln \mu'} \Big|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}} \\ \bar{\gamma}_{\omega_{i(j)}}(g, g_a, c_a, \omega'_{i(j)}, \varepsilon) &= \frac{d\omega_{i(j)}}{d \ln \mu'} \Big|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}} \\ \gamma_\omega(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{d \ln Z_\omega}{d \ln \mu'} \Big|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}} & \tilde{\gamma}(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{d \ln \tilde{Z}}{d \ln \mu'} \Big|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}} \\ \gamma(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{d \ln Z}{d \ln \mu'} \Big|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}} \\ \gamma_r(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{d \ln Z_r}{d \ln \mu'} \Big|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

L'expression des fonctions  $\bar{\gamma}_{\omega_{i(j)}}$ , qui seront responsables des lois d'échelle temporelles, est la suivante :

$$\bar{\gamma}_{\omega_{i(j)}}(g, g_a, c_a, \omega_{i(j)}, \varepsilon) = -\omega_{i(j)}\gamma_\omega(g, g_a, c_a, \varepsilon) \quad (4.74)$$

Notons le fait standard suivant : les différentes fonctions intervenant dans les équations de Callan-Symanzik ne dépendent pas de l'échelle arbitraire  $\mu'$ . Ceci est une conséquence (certes indirecte...) du fait que les facteurs  $Z$  ne dépendent que des  $k_{i(j)}/\mu'$ , ce qui se déduit par analyse dimensionnelle. En effet, dans le schéma minimal, ces facteurs  $Z$  sont des "polynômes" construits à partir des  $k_{i(j)}/\mu'$ , de degré inférieur ou égal au degré de divergence du diagramme qui leur donne naissance [91]. Ce degré étant d'ordre  $\varepsilon$  dans le schéma minimal, les facteurs  $Z$  sont linéaires en  $\ln k_{i(j)}/\mu'$  dans un développement en puissances de  $\varepsilon$ . Leur dérivée par rapport à  $\ln \mu'$  ne dépend donc pas de  $k_{i(j)}/\mu'$ .

Le point essentiel de la structure de ces équations est que l'équation associée à la théorie critique, c'est à dire sans dépendance dans le paramètre renormalisé  $r$  (qui est alors fixé à zéro), contient trois fonctions associées à des dérivées partielles par rapport aux autres paramètres du système. Sur la surface critique, correspondant au cas particulier  $r = 0$ , nous disons que nous sommes au point fixe des équations de groupe de renormalisation ci-dessus, lorsque les trois fonctions  $\beta$ ,  $\beta_a$  et  $\rho_{c_a}$  sont nulles. La condition point fixe est donc donnée par un système de trois équations non linéaires couplées à trois inconnues, alors que la théorie du modèle  $O(2)$  dynamique, cas particulier de notre théorie, n'en possède qu'une. En ce sens, les fonctions  $\beta$ ,  $\beta_a$  et  $\rho_{c_a}$  pourraient toutes trois mériter le nom de "fonctions  $\beta$ ". Toutefois nous garderons la notation  $\rho_{c_a}$  pour la fonction associée aux variations du paramètre  $c_a$  car ce paramètre n'est pas une constante de couplage.

Dans le calcul concret effectué dans le chapitre 6, nous calculons les facteurs  $Z$  à partir des diagrammes de Feynman de la théorie, et il nous faut donc exprimer les fonctions définies précédemment directement en fonction des facteurs  $Z$ . Pour cela nous introduisons les facteurs  $\bar{Z}$  suivants :

$$g^{(0)} = \bar{Z}_u g \quad g_a^{(0)} = \bar{Z}_{u_a} g_a \quad c_a^{(0)} = \bar{Z}_{c_a} c_a \quad (4.75)$$

En écrivant que les paramètres de la théorie nue ne dépendent pas de l'échelle  $\mu'$ , nous obtenons le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \bar{Z}_u + g \frac{\partial \bar{Z}_u}{\partial g} & g \frac{\partial \bar{Z}_u}{\partial g_a} & g \frac{\partial \bar{Z}_u}{\partial c_a} \\ g_a \frac{\partial \bar{Z}_{u_a}}{\partial g} & \bar{Z}_{u_a} + g_a \frac{\partial \bar{Z}_{u_a}}{\partial g_a} & g_a \frac{\partial \bar{Z}_{u_a}}{\partial c_a} \\ c_a \frac{\partial \bar{Z}_{c_a}}{\partial g} & c_a \frac{\partial \bar{Z}_{c_a}}{\partial g_a} & \bar{Z}_{c_a} + c_a \frac{\partial \bar{Z}_{c_a}}{\partial c_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \beta_a \\ \rho_{c_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon \bar{Z}_u g \\ -\varepsilon \bar{Z}_{u_a} g_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

La résolution de ce système semble au premier abord constituer une étape technique peu réjouissante. En réalité, nous savons que les fonctions  $\beta$ ,  $\beta_a$  et  $\rho_{c_a}$ , qui dépendent de  $\varepsilon$ , doivent être parfaitement définies dans la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  (toute notre démarche consiste en effet à éliminer les divergences dans cette limite). Le fait que cette propriété soit vérifiée est une conséquence de la renormalisabilité de la théorie [91]. Ayant observé cette propriété, nous pouvons faire un développement en puissances de  $\varepsilon^{-1}$  du système précédent. Le système s'inverse alors

comme un développement limité, et le fait que le membre de droite ne contienne qu'un terme proportionnel à  $\varepsilon$  (et en particulier aucune puissance d'ordre supérieur), nous assure que seul le terme d'ordre  $\varepsilon^{-1}$  est à considérer. Nous obtenons donc :

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \beta_a \\ \rho_{c_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon g \\ -\varepsilon g_a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g \frac{\partial \bar{Z}_u}{\partial g} & g \frac{\partial \bar{Z}_u}{\partial g_a} & g \frac{\partial \bar{Z}_u}{\partial c_a} \\ g_a \frac{\partial \bar{Z}_{u_a}}{\partial g} & g_a \frac{\partial \bar{Z}_{u_a}}{\partial g_a} & g_a \frac{\partial \bar{Z}_{u_a}}{\partial c_a} \\ c_a \frac{\partial \bar{Z}_{c_a}}{\partial g} & c_a \frac{\partial \bar{Z}_{c_a}}{\partial g_a} & \bar{Z}_{c_a} + c_a \frac{\partial \bar{Z}_{c_a}}{\partial c_a} \end{pmatrix}^{(1)} \begin{pmatrix} g \\ g_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

où <sup>(1)</sup> indique que nous prenons les coefficients du pôle d'ordre 1 en  $\varepsilon^{-1}$  dans la matrice. La nullité des termes du développement en puissances de  $\varepsilon^{-i}$  des fonctions  $\beta$ ,  $\beta_a$  et  $\rho_{c_a}$  impose des équations de récurrence sur les pôles en  $\varepsilon^{-i}$  des coefficients de la matrice. Ces équations, possiblement très compliquées, ne sont pas nécessaires à l'étude qui nous intéresse.

Avec ces propriétés, nous avons la structure suivante :

$$\begin{aligned} \beta(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= -\varepsilon g + \beta^{(4)}(g, g_a, c_a) \\ \beta_a(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= -\varepsilon g_a + \beta_a^{(4)}(g, g_a, c_a) \\ \rho_{c_a}(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \rho_{c_a}(g, g_a, c_a) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Les mêmes arguments nous permettent de dériver les expressions des autres fonctions intervenant dans les équations de Callan-Symanzik :

$$\begin{aligned} \gamma_\omega(g, g_a, c_a, \varepsilon) = \gamma_\omega(g, g_a, c_a) &= -g \frac{\partial Z_\omega^{(1)}}{\partial g} - g_a \frac{\partial Z_\omega^{(1)}}{\partial g_a} \\ \tilde{\gamma}(g, g_a, c_a, \varepsilon) = \tilde{\gamma}(g, g_a, c_a) &= -g \frac{\partial \tilde{Z}^{(1)}}{\partial g} - g_a \frac{\partial \tilde{Z}^{(1)}}{\partial g_a} \\ \gamma(g, g_a, c_a, \varepsilon) = \gamma(g, g_a, c_a) &= -g \frac{\partial Z^{(1)}}{\partial g} - g_a \frac{\partial Z^{(1)}}{\partial g_a} \\ \gamma_r(g, g_a, c_a, \varepsilon) = \gamma_r(g, g_a, c_a) &= -g \frac{\partial Z_r^{(1)}}{\partial g} - g_a \frac{\partial Z_r^{(1)}}{\partial g_a} \\ \bar{\gamma}_{\omega_{i(j)}}(g, g_a, c_a, \varepsilon) = \bar{\gamma}_{\omega_{i(j)}}(g, g_a, c_a) &= -\omega_{i(j)} \gamma_\omega(g, g_a, c_a) \end{aligned} \quad (4.79)$$

#### 4.5.6 Solution des équations de Callan-Symanzik

Pour résoudre les équations de Callan-Symanzik, qui sont des équations aux dérivées partielles, nous utilisons la méthode des caractéristiques [150]. Cette méthode exploite le fait que les équations ont la forme :

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} f = g f \quad (4.80)$$

où  $\vec{\nabla}$  représente l'opérateur gradient par rapport à tous les paramètres présents dans la fonction  $f$ , et  $g$  est une autre fonction des mêmes paramètres. En posant  $h(t) = f(\vec{x}(t))$  et en imposant :

$$\dot{x}_i(t) = V_i(\vec{x}(t)) \quad (4.81)$$

notre équation s'écrit :

$$\frac{d \ln h}{dt} = g(\vec{x}(t)) \quad (4.82)$$

dont l'intégration est immédiate. Connaissant la fonction  $f$  en un point de l'espace des paramètres, l'intégration de (4.82) nous la donne sur toute la courbe  $\vec{x}(t)$  passant par ce point, cette courbe étant donnée par l'intégration de (4.81). Dans le cadre des équations de Callan-Symanzik,  $\mu'$  représente une échelle de moment, donc l'inverse d'une échelle de longueur. D'autre part, l'intégration des équations précédentes nous donne une évolution exponentielle du paramètre  $\mu'$  en fonction de  $t$ . Aussi préférons-nous écrire les solutions en termes de la variable  $s = e^t$ , qui représente un facteur d'échelle. Pour dériver les lois d'échelle nous aurons besoin, comme dans le cadre de la technique de Wilson, d'effectuer une dilatation d'échelle sur nos fonctions de corrélation, en redéfinissant les unités de mesure. La dimension des fonctions vertex réduites est donnée par :

$$\left[ \widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)} \right] = d + 2 - \tilde{N} \left( \frac{d+2}{2} \right) - N \left( \frac{d-2}{2} \right) \quad (4.83)$$

Après dilatation d'échelle, la solution des équations de Callan-Symanzik s'écrit :

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, c_a, g, g_a, r, \mu') = \\ s^{d+2-\tilde{N}(\frac{d+2}{2})-N(\frac{d-2}{2})} \exp \left\{ - \int_0^{\ln s} \left[ (\tilde{N} + N - 1)\gamma_\omega + \frac{\tilde{N}}{2}\tilde{\gamma} + \frac{N}{2}\gamma \right] d \ln s' \right\} \cdot \\ \widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi] \left( \frac{\mathbf{q}_{i(j)}}{s}, \frac{\omega_{i(j)}(s)}{s^2}; c, c_a(s), g(s), g_a(s), \frac{r(s)}{s^2}, \mu' \right) \end{aligned} \quad (4.84)$$

Les fonctions  $\gamma$  qui apparaissent dans l'intégrale de l'exponentielle sont à comprendre comme des fonctions de  $(g(s), g_a(s), c_a(s))$ . L'évolution des paramètres en fonction de la dilatation d'échelle  $s$  est donnée par l'équation (4.81) de la méthode des caractéristiques. Traduite en termes des fonctions définies en (4.73), elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d \ln s} &= \beta(g(s), g_a(s), c_a(s), \varepsilon) \\ \frac{dg_a}{d \ln s} &= \beta_a(g(s), g_a(s), c_a(s), \varepsilon) \\ \frac{dc_a}{d \ln s} &= \rho_{c_a}(g(s), g_a(s), c_a(s)) \\ \frac{dr}{d \ln s} &= -r(s) \gamma_r(g(s), g_a(s), c_a(s)) \\ \frac{d\omega_{i(j)}}{d \ln s} &= -\omega_{i(j)}(s) \gamma_\omega(g(s), g_a(s), c_a(s)) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Nous avons donc su intégrer les équations de Callan-Symanzik pour les fonctions de corrélations de la théorie associée au champ  $\phi$ , défini en (4.69). Nous discuterons dans le chapitre 7 comment calculer les fonctions de corrélation de la théorie physique dans le référentiel originel (voir l'équation (7.6)).

### 4.5.7 Point fixe et exposants critiques

Comme nous l'avons dit précédemment, le point fixe du groupe de renormalisation est défini par :

$$\beta(g^*, g_a^*, c_a^*, \varepsilon) = 0 \quad , \quad \beta_a(g^*, g_a^*, c_a^*, \varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \rho_{c_a}(g^*, g_a^*, c_a^*) = 0 \quad (4.86)$$

En ce point, les paramètres  $g$ ,  $g_a$  et  $c_a$  ne varient pas en fonction de l'échelle. Les fonctions  $\gamma(x_i(s))$  sont donc des constantes. Ainsi toutes les dépendances en  $s$  sont des lois d'échelles, et la solution des équation de Callan-Symanzik (4.84) devient :

$$\begin{aligned} & \widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, c_a^*, g^*, g_a^*, r, \mu') \\ &= \exp \left\{ \left[ d + 2 - \tilde{N} \left( \frac{d+2}{2} \right) - N \left( \frac{d-2}{2} \right) - (\tilde{N} + N - 1)\gamma_\omega^* + \frac{\tilde{N}}{2}\tilde{\gamma}^* + \frac{N}{2}\gamma^* \right] \ln s \right\} \cdot \\ & \quad \widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi] \left( \frac{\mathbf{q}_{i(j)}}{s}, \frac{\omega'_{i(j)}(s)}{s^2}; c, c_a^*, g^*, g_a^*, \frac{r(s)}{s^2}, \mu' \right) \end{aligned} \quad (4.87)$$

avec :

$$r(s) = r \cdot s^{-\gamma_r^*} \quad \omega_{i(j)}(s) = \omega_{i(j)} s^{-\gamma_\omega^*} \quad (4.88)$$

L'identification avec les comportements asymptotiques (4.41) et (4.42) nous permet d'identifier les exposants critiques. Pour cela, il faut déduire de la solution (4.87) son implication en termes de la fonction de corrélation  $G[\phi]$  et de la fonction de réponse  $\gamma[\phi]$ . Les quatre exposants critiques indépendants sont donnés par :

$$\begin{aligned} \nu &= (2 + \gamma_r(g^*, g_a^*, c_a^*))^{-1} & z - 2 &= \gamma_\omega(g^*, g_a^*, c_a^*) \\ \eta - 2(z - 2) &= \gamma(g^*, g_a^*, c_a^*) & \tilde{\eta} - 2(z - 2) &= \tilde{\gamma}(g^*, g_a^*, c_a^*) \end{aligned} \quad (4.89)$$

### 4.5.8 Structure de groupe en gardant $\omega_0$

Dans cette section, nous exposons la structure du groupe de renormalisation dans le cadre de la technique de Callan-Symanzik dans la version où l'on garde  $\omega_0$  dans les équations de groupe de renormalisation. La plupart des remarques faites dans les sections précédentes seront valables. En revanche, un *double* développement perturbatif des fonctions vertex est maintenant nécessaire. Au niveau des équations de Callan-Symanzik, cela se traduit par la présence d'un terme supplémentaire par rapport aux équations qui ont été obtenues précédemment. Dans ce nouveau cadre, la théorie critique est définie par *deux* conditions, à savoir la nullité des paramètres renormalisés  $r$  et  $\omega_0$ . Nous retrouvons ainsi que le comportement critique associé à cette méthode correspond au cas particulier d'une transition non-oscillante. Nous assurons la cohérence de nos résultats avec le calcul des paragraphes précédents et les commentaires du paragraphe 4.2.5.

De façon à alléger les notations, nous notons dans cette section  $\vec{g}$  le vecteur  $(g, g_a, c_a)$ , et  $\vec{\beta}$  le vecteur  $(\beta, \beta_a, \rho_{c_a})$ . En effet, ces trois paramètres et fonctions apparaissent de manière symétrique dans les équations de Callan-Symanzik et

leurs solutions. Toutefois, nous gardons à l'esprit que le paramètre  $c_a$  n'est pas une constante de couplage.

Nous partons maintenant de l'action nue (4.51), et nous introduisons les masses arbitraires  $\mu$  et  $\mu'$ , ainsi que les constantes de couplages adimensionnées  $g^{(0)}$  et  $g_a^{(0)}$  :

$$\begin{aligned} u^{(0)} &= \mu^\varepsilon g^{(0)} = \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} g^{(0)} \\ u_a^{(0)} &= \mu^\varepsilon g_a^{(0)} = \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} g_a^{(0)} \end{aligned} \quad (4.90)$$

Nous définissons les quantités renormalisées :

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{(0)} &= \psi_\alpha^{(I)} = \sqrt{Z} \psi_\beta \\ \tilde{\psi}_\alpha^{(0)} &= \Omega_{\alpha\beta}(-\theta) \tilde{\psi}_\beta^{(I)} = \Omega_{\alpha\beta}(-\theta) \sqrt{\tilde{Z}} \tilde{\psi}_\beta \\ g^{(0)} &= Z_u \sqrt{\tilde{Z} Z^3}^{-1} g \\ g_a^{(0)} &= Z_{u_a} \sqrt{\tilde{Z} Z^3}^{-1} g_a \\ r^{(0)} &= r_c^{(0)} + Z_r r \\ \omega^{(0)} &= Z_\omega \omega \\ \omega_0^{(0)} &= Z_{\omega_0} Z_\omega \omega_0 \\ c_a^{(0)} &= Z_{c_a} c_a \end{aligned} \quad (4.91)$$

L'action nue se décompose de la façon suivante :

$$\mathcal{S}^{(0)} [\tilde{\psi}_\alpha^{(0)}, \psi_\alpha^{(0)}] = \mathcal{S} [\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] + \delta\mathcal{S} [\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] + \mathcal{S}_{\text{per}} [\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] \quad (4.92)$$

où les différents termes sont :

l'action renormalisée :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} [\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] &= \int_{\mathbf{q}, \omega'} \left\{ D \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\psi}_\alpha - \tilde{\psi}_\alpha [i\omega + c\mathbf{q}^2] \psi_\alpha - \tilde{\psi}_\alpha [c_a \mathbf{q}^2] \varepsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta \right\} \\ &\quad - \int_{k'_1 k'_2 k'_3} \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} g_{\alpha\beta} \tilde{\psi}_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\gamma \end{aligned} \quad (4.93)$$

l'action des contre-termes :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} [\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] &= \int_{\mathbf{q}, \omega} \left\{ D (Z_\omega \tilde{Z} - 1) \tilde{\psi}_\alpha \tilde{\psi}_\alpha \right. \\ &\quad - \tilde{\psi}_\alpha \left[ i\omega \left( Z_\omega^2 \sqrt{\tilde{Z} \tilde{Z}} \cos \theta - 1 \right) + c\mathbf{q}^2 \left( Z_\omega \sqrt{\tilde{Z} \tilde{Z}} \cos \theta - Z_\omega \sqrt{\tilde{Z} \tilde{Z}} Z_{c_a} \frac{c_a}{c} \sin \theta - 1 \right) \right] \psi_\alpha \\ &\quad - \tilde{\psi}_\alpha \left[ i\omega \left( Z_\omega^2 \sqrt{\tilde{Z} \tilde{Z}} \sin \theta \right) + c_a \mathbf{q}^2 \left( Z_\omega \sqrt{\tilde{Z} \tilde{Z}} Z_{c_a} \cos \theta + Z_\omega \sqrt{\tilde{Z} \tilde{Z}} \frac{c}{c_a} \sin \theta - 1 \right) \right] \varepsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta \left. \right\} \\ &\quad - \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} \int_{k'_1 k'_2 k'_3} \left\{ [(Z_u Z_\omega^3 \cos \theta - 1)g - Z_{u_a} Z_\omega^3 \sin \theta g_a] \tilde{\psi}_\alpha \psi_\alpha \psi_\gamma \psi_\gamma \right. \\ &\quad \left. + [(Z_{u_a} Z_\omega^3 \cos \theta - 1)g_a + Z_u Z_\omega^3 \sin \theta g] \varepsilon_{\alpha\beta} \tilde{\psi}_\alpha \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\gamma \right\} \end{aligned} \quad (4.94)$$



et l'action associée aux termes traités perturbativement :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{per} [\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] &= \int_{\mathbf{q}, \omega'} \left\{ -\tilde{\psi}_\alpha \psi_\alpha \sqrt{Z \tilde{Z}} Z_\omega [r Z_r \cos \theta - \omega_0 Z_{\omega_0} Z_\omega \sin \theta] \right\} \\ &+ \int_{\mathbf{q}, \omega'} \left\{ -\tilde{\psi}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta \sqrt{Z \tilde{Z}} Z_\omega [\omega_0 Z_{\omega_0} Z_\omega \cos \theta + r Z_r \sin \theta] \right\} \end{aligned} \quad (4.95)$$

Nous avons maintenant deux types de termes perturbatifs différents : ceux associés à la masse renormalisée  $r$ , et ceux associés à la pulsation renormalisée  $\omega_0$ . Notons  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L_r, L_\omega)}(k_{i(j)}, \bar{k}_{l_r(l_\omega)}; c, \vec{g}, r, \omega_0, \mu')$  les vertex propres de la théorie renormalisée construits avec  $L_r$  insertions de :

$$-r Z_r \sqrt{Z \tilde{Z}} Z_\omega \left[ \tilde{\psi}_\alpha \psi_\alpha \cos \theta + \tilde{\psi}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta \sin \theta \right]$$

avec une impulsion entrante  $\bar{k}_{l_r}$ , et  $L_\omega$  insertions de :

$$-\omega_0 Z_{\omega_0} Z_\omega^2 \sqrt{Z \tilde{Z}} \left[ \tilde{\psi}_\alpha \psi_\alpha (-\sin \theta) + \tilde{\psi}_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta} \psi_\beta \cos \theta \right]$$

avec une impulsion entrante  $\bar{k}_{l_\omega}$ . Le vertex propre renormalisé  $\Gamma^{(\tilde{N}, N)}$  est alors donné par :

$$\Gamma^{(\tilde{N}, N)}(k_{i(j)}; c, \vec{g}, r, \omega_0, \mu') = \sum_{L_r=0}^{\infty} \sum_{L_\omega=0}^{\infty} \frac{t^{L_r}}{L_r!} \frac{t^{L_\omega}}{L_\omega!} \Gamma^{(\tilde{N}, N, L_r, L_\omega)}(k_{i(j)}, \bar{k}_{l_r(l_\omega)} = 0; c, \vec{g}, 0, 0, \mu') \quad (4.96)$$

En termes des fonctions vertex réduites, nous avons les relations suivantes entre les théories nue et renormalisée :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}(k_{i(j)}; c, \vec{g}, r, \omega_0, \mu') &= Z^{\tilde{N}+N-1} \tilde{Z}^{\tilde{N}/2} Z^{N/2} \hat{\Gamma}_0^{(\tilde{N}, N)}(k_{i(j)}^{(0)}; c, \vec{u}^{(0)}, r^{(0)}, \omega_0^{(0)}) \\ \hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N, L_r, L_\omega)}(k_{i(j)}, \bar{k}_{l_r(l_\omega)}; c, \vec{g}, r, \omega_0, \mu') &= \\ Z_\omega^{\tilde{N}+N} \tilde{Z}^{\tilde{N}/2} Z^{N/2} Z_r^{L_r} (Z_{\omega_0} Z_\omega)^{L_\omega} \hat{\Gamma}_0^{(\tilde{N}, N, L_r, L_\omega)}(k_{i(j)}^{(0)}, \bar{k}_{l_r(l_\omega)}^{(0)}; c, \vec{u}^{(0)}, r^{(0)}, \omega_0^{(0)}) \end{aligned} \quad (4.97)$$

et les équations de Callan-Symanzik s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu'} + \vec{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{g}} + \sum_{i(j)=1}^{N(P)} \gamma_{\omega_{i(j)}} \frac{\partial}{\partial \omega_{i(j)}} - \gamma_r \frac{\partial}{\partial \ln r} - \gamma_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \ln \omega_0} - \right. \\ \left. -(N+P-1)\gamma_\omega - \frac{N}{2}\tilde{\gamma} - \frac{P}{2}\gamma \right] \hat{\Gamma}^{(N, P)}(\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}, r, \omega_0, \mu') = 0 \end{aligned} \quad (4.98)$$

avec des définitions analogues à (4.73), auxquelles il faut ajouter :

$$\gamma_{\omega_0}(g, g_a, c_a, \varepsilon) = \left. \frac{d \ln (Z_{\omega_0} Z_\omega)}{d \ln \mu'} \right|_{u^{(0)}, u_a^{(0)}, c_a^{(0)}}$$

La différence essentielle avec les équations (4.72) est que ces équations contiennent un terme dérivatif semblable à  $\gamma_r \frac{\partial}{\partial \ln r}$  supplémentaire, et que par conséquent la théorie critique est définie par  $r = 0$  et  $\omega_0 = 0$ . Les valeurs de ces paramètres ayant été fixées à zéro, la théorie critique définie ici obéit *exactement* aux mêmes équations que celles dérivées avec la première méthode. Ainsi nous retrouvons le fait que cette méthode mène à une théorie critique qui est un cas particulier de la transition générale obtenue précédemment. Ce cas particulier correspond au point critique d'une théorie non-oscillante.

## Chapitre 5

# Calcul perturbatif à l'ordre d'une boucle

Dans ce chapitre, nous allons dériver les équations de groupe de renormalisation à l'ordre d'une boucle dans le cadre de la technique de Wilson. Pour cela, nous allons suivre pas à pas la méthode décrite dans les paragraphes 4.2.4 et 4.3.2, et effectuer explicitement le calcul des équations de groupe de renormalisation au premier ordre en théorie des perturbations. Nous savons, grâce aux arguments du paragraphe 4.2.2, que les seuls termes à considérer sont : d'une part les termes constants et linéaires en  $i\omega$  et  $\mathbf{q}^2$  de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1}^{(2)}$  dans son développement en puissances de ces variables, d'autres part les termes constants uniquement de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2)}$  et  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4)}$  dans ce même développement. Les propriétés de symétrie liées à l'invariance de phase de la théorie, mentionnées dans le paragraphe 4.2.2 et qui, ajoutées de ce que nous venons de dire, terminent de justifier que l'action renormalisée puisse s'écrire sous la même forme que l'action de départ, seront retrouvées explicitement sur l'expression des diagrammes. Après le calcul explicite et détaillé des diagrammes de la théorie exposé dans la section 5.1, nous présentons dans la section 5.2 les équations de groupe de renormalisation obtenues par les deux méthodes qui ont été exposées dans le chapitre 4 et qui consistent à garder ou éliminer le paramètre  $\omega_0$  des équations de groupe de renormalisation. Nous présentons la structure des points fixes de la théorie à cet ordre en théorie des perturbations, et justifions de la nécessité d'un calcul à l'ordre de deux boucles. Dans ce chapitre,  $\Gamma^{(M)(1)}$  désigne le terme d'ordre une boucle du développement perturbatif de  $\Gamma^{(M)}$ , dérivée fonctionnelle de  $\Gamma$  par rapport à  $N$  champ  $\varphi_\alpha$  et  $\tilde{N}$  champs  $\tilde{\varphi}_\alpha$ .  $M$  se décompose en  $M = \tilde{N} + N$ , et  $\tilde{N}$  et  $N$  sont précisés par les indices de  $\Gamma^{(M)}$  ou  $\Gamma^{(M)(1)}$ .

### 5.1 Renormalisation infinitésimale des paramètres à l'ordre d'une boucle

De façon à mettre en pratique les principes de calcul exposés dans le chapitre 4, il nous faut calculer les vertex propres de la théories, dont les termes de la série perturbative peuvent être représentés par les diagrammes de Feynman

1-particule irréductibles de la théorie, auxquels ont été retranchés les propagateurs externes. Les intégrales qui apparaissent dans les boucles des diagrammes de Feynman portent sur toutes les valeurs des pulsations et sur la couche d'impulsions comprise entre  $\Lambda/e^{\delta l}$  et  $\Lambda^1$ . Nous savons aussi que, pour dériver les équations de groupe, il nous faut dériver les variations infinitésimales des paramètres par rapport à  $\delta l$ , et que par conséquent à l'ordre d'une boucle, seule la valeur de l'intégrand intervient dans le résultat, les intégrales portant sur les impulsions ne devant pas être effectuées. Nous présentons ici le calcul explicite des diagrammes de Feynman associés aux dérivées de la fonctionnelle  $\Gamma$  dont nous avons besoin, et déduisons les variations infinitésimales pour les paramètres effectifs de la théorie en fonction de l'échelle.

### 5.1.1 Renormalisation du propagateur

Commençons par considérer  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2}^{(2)(1)}$ . Puisque le vertex d'interaction ne contient qu'une seule patte  $\tilde{\psi}_\alpha$ , nous ne pouvons pas former de diagramme renormalisant ce paramètre à l'ordre d'une boucle. Cela traduit le fait qu'il n'y a pas de renormalisation non triviale de ce paramètre à l'ordre d'une boucle. Considérons maintenant  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)(1)}$ . Nous avons vu dans le chapitre 3 qu'il était donné par l'équation (3.28), et que le calcul menait à l'expression suivante :

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)(1)}(k) = 4U_{\alpha\beta} \int_{\mathbf{q}'} C_{11}(\mathbf{q}', t' = 0) \quad (5.1)$$

L'action effective de la théorie, après intégration sur la couche d'impulsions comprises entre  $\Lambda/e^{\delta l}$  et  $\Lambda$ , peut être réécrite sous la forme (4.11) ou (4.26). Les variations des paramètres qui apparaissent dans ces expressions sont données par :

$$\begin{aligned} \delta D &= -\frac{1}{2} \Gamma_{\tilde{1}\tilde{1}}^{(2)(1)}(0) \\ \delta r &= \Gamma_{\tilde{1}\tilde{1}}^{(2)(1)}(0) \\ \delta \omega_0 &= \Gamma_{\tilde{2}\tilde{1}}^{(2)(1)}(0) \\ \delta \lambda_1 &= \frac{\delta \Gamma_{\tilde{1}\tilde{1}}^{(2)(1)}}{\delta(i\omega)}(0) \\ \delta \lambda_2 &= \frac{\delta \Gamma_{\tilde{2}\tilde{1}}^{(2)(1)}}{\delta(i\omega)}(0) \\ \delta c &= \frac{\delta \Gamma_{\tilde{1}\tilde{1}}^{(2)(1)}}{\delta \mathbf{q}^2}(0) \\ \delta c_a &= \frac{\delta \Gamma_{\tilde{2}\tilde{1}}^{(2)(1)}}{\delta \mathbf{q}^2}(0) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Etant donné que  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2}^{(2)(1)}$  est nul et que  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)(1)}(k)$  est indépendant de  $k$ , les variations  $\delta D$ ,  $\delta \lambda_1$ ,  $\delta \lambda_2$ ,  $\delta c$  et  $\delta c_a$  sont nulles à cet ordre en théorie de perturbations,

<sup>1</sup>De façon alléger les notations, les bornes des intégrales seront sous-entendus.

et cela est vrai dans le cadre des deux méthodes, que l'on garde ou non  $\omega_0$  dans le jeu de paramètres renormalisés.

Dans le cadre de la première méthode, où  $\omega_0$  est conservé comme un paramètre de la théorie, nous obtenons les expressions suivantes :

$$\delta r = 4Du \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{r + c\mathbf{q}^2} \quad ; \quad \delta\omega_0 = 4Du_a \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{r + c\mathbf{q}^2} \quad (5.3)$$

Et les expressions analogues dans le cadre de la seconde méthode :

$$\delta r = 4Du \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{r + c\mathbf{q}^2} \quad ; \quad \delta\widehat{\omega}_0 = 4Du_a \int_{\mathbf{q}} \frac{1}{r + c\mathbf{q}^2} \quad (5.4)$$

### 5.1.2 Renormalisation du vertex

Nous avons justifié que seul  $\Gamma_{\widetilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}^{(4)}$  est à considérer. A l'ordre d'une boucle,

il peut être représenté graphiquement de la façon suivante :

$$\Gamma_{\widetilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}^{(4)(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \alpha_1, k_1 \quad \beta_2, k_2 \\ \text{diagramme 1} \\ \beta_3, k_3 \quad \beta_4, k_4 \end{array} + \begin{array}{c} \alpha_1, k_1 \quad \beta_3, k_3 \\ \text{diagramme 2} \\ \beta_2, k_2 \quad \beta_4, k_4 \end{array} + \begin{array}{c} \alpha_1, k_1 \quad \beta_4, k_4 \\ \text{diagramme 3} \\ \beta_2, k_2 \quad \beta_3, k_3 \end{array} \right] \cdot (2\pi)^{d+1} \delta^{d+1}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (5.5)$$

où il faut tenir compte des facteurs de symétrie des diagrammes ; le facteur  $\frac{1}{2}$  provient du développement de l'exponentielle. Chacun de ces diagrammes se décompose selon :

$$\begin{array}{c} \text{diagramme 1} \\ = \\ \text{diagramme 1a} + \text{diagramme 1b} + \text{diagramme 1c} + \text{diagramme 1d} + \text{diagramme 1e} + \text{diagramme 1f} \\ = (a) + (b) + (c) + (d) + (e) + (f) \end{array} \quad (5.6)$$

avec les bons facteurs de symétrie.

De façon à ne commettre aucune erreur dans le calcul des facteurs de symétrie, nous considérons toutes les classes de symétrie qu'engendre notre théorie à partir du graphe unique à quatre pattes de la théorie  $\phi^4$  statique. Dans cette

théorie statique, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(4)(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = & -\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} k_1 \quad k_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ k_3 \quad k_4 \end{array} + \begin{array}{c} k_1 \quad k_3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ k_2 \quad k_4 \end{array} + \right. \\
 + & \left. \begin{array}{c} k_1 \quad k_4 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ k_2 \quad k_3 \end{array} \right] \cdot (2\pi)^{d+1} \delta^{d+1}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

où chaque graphe est affecté du facteur  $(4!)^2$ . Dans la théorie dynamique, l'asymétrie du vertex conduit aux classes topologiques suivantes :

$$(1) = \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{wavy} \end{array} \quad (2) = \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{wavy} \end{array} \quad (3) = \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{wavy} \end{array} \quad (4) = \begin{array}{c} \text{wavy} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{loop} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{wavy} \end{array} \tag{5.8}$$

dont les facteurs de symétrie sont respectivement :

$$\begin{aligned}
 (1) & \rightarrow 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 = 144 \\
 (2) & \rightarrow 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 72 \\
 (3) & \rightarrow 2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 72 \\
 (4) & \rightarrow 4 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 288
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Au total nous avons bien  $144 + 72 + 72 + 288 = 576 = (4!)^2$  graphes, ce qui correspond bien au facteur de symétrie du graphe de la théorie statique. Enfin pour notre étude, nous ne sommes intéressés que par  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4}^{(4)(1)}$ , pour lequel seuls les graphes de la classe topologique (4) sont à considérer. Il faut noter que la patte brisée externe introduit une dissymétrie dans le diagramme, celle-ci n'étant pas équivalente aux trois autres (le choix de positionnement de son indice ayant été d'ores et déjà implicitement effectué). Nous avons alors au total quatre fois moins de graphes que dans le décompte précédent, c'est à dire  $3 \times 4!$  graphes pour chacune des positions des indices de l'équation (5.5). D'autre part, nous avons une dissymétrie supplémentaire liée à la topologie du vertex, ce qui nous engendre les graphes de l'équation (5.6). Ces sous-classes de graphes se décomposent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 (a) = & \text{Diagram (a)} = \text{Diagram (a}_2\text{)} + \text{Diagram (a}_3\text{)} + \text{Diagram (a}_4\text{)} \\
 & = (a_2) + (a_3) + (a_4) \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

avec des décompositions analogues les sous-classes (b) à (f). Les facteurs de symétrie associés à ces diagrammes sont respectivement :

$$\begin{aligned}
 & \text{pour les sous-classes (a), (c), (e)} \rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 8 \\
 & \text{pour les sous-classes (b), (d), (f)} \rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Il faut noter que les sous-classes (b), (d) et (f) sont en fait chacune divisée en deux "sous-sous-classes" de facteur de symétrie  $2^3$ . L'origine de cette distinction est due au choix du positionnement respectif des indices  $\beta_3$  et  $\beta_4$ .

Ecrivons maintenant les expressions mathématiques de toutes ces classes topologiques de graphes. Nous indexons les graphes de la façon suivante :

$$\tag{5.12}$$

Avec ces notations, nous obtenons les expressions :

$$\begin{aligned}
 (a_2) &= \text{Diagram (a)} \\
 &= 8 \times U_{\alpha_1\beta_2} U_{\bar{\gamma}\bar{\sigma}} \delta_{\beta_3\beta_4} \int_{k'} \chi_{\sigma\bar{\gamma}} C_{\bar{\sigma}\sigma} \\
 &= 8 \times U_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\beta_3\beta_4} \int_{k'} \text{Tr}(\chi UC) \\
 (b_2) &= \text{Diagram (b)} \\
 &= 8 \times \left[ U_{\alpha_1\beta_2} U_{\bar{\gamma}\beta_3} \int_{k'} \chi_{\sigma\bar{\gamma}} C_{\beta_4\sigma} + U_{\alpha_1\beta_2} U_{\bar{\gamma}\beta_4} \int_{k'} \chi_{\sigma\bar{\gamma}} C_{\beta_3\sigma} \right] \\
 &= 8 \times U_{\alpha_1\beta_2} \int_{k'} [(C\chi U)_{\beta_4\beta_3} + (C\chi U)_{\beta_3\beta_4}] \\
 (c_2) &= \text{Diagram (c)} \\
 &= 8 \times U_{\alpha_1\sigma} U_{\bar{\gamma}\bar{\sigma}} \delta_{\beta_3\beta_4} \int_{k'} \chi_{\beta_2\bar{\gamma}} C_{\bar{\sigma}\sigma} \\
 &= 8 \times \int_{k'} (UC^t U^t \chi^t)_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\beta_3\beta_4} \\
 (d_2) &= \text{Diagram (d)} \\
 &= 8 \times \left[ U_{\alpha_1\sigma} U_{\bar{\gamma}\beta_3} \int_{k'} \chi_{\beta_2\bar{\gamma}} C_{\beta_4\sigma} + U_{\alpha_1\sigma} U_{\bar{\gamma}\beta_4} \int_{k'} \chi_{\beta_2\bar{\gamma}} C_{\beta_3\sigma} \right] \\
 &= 8 \times \int_{k'} [(UC^t)_{\alpha_1\beta_4} (\chi U)_{\beta_2\beta_3} + (UC^t)_{\alpha_1\beta_3} (\chi U)_{\beta_2\beta_4}] \\
 (e_2) &= \text{Diagram (e)} \\
 &= 8 \times U_{\alpha_1\gamma} U_{\bar{\gamma}\bar{\sigma}} \delta_{\beta_3\beta_4} \int_{k'} \chi_{\gamma\bar{\gamma}} C_{\bar{\sigma}\beta_2} \\
 &= 8 \times \int_{k'} (U\chi UC)_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\beta_3\beta_4} \\
 (f_2) &= \text{Diagram (f)} \\
 &= 8 \times \left[ U_{\alpha_1\gamma} U_{\bar{\gamma}\beta_3} \int_{k'} \chi_{\gamma\bar{\gamma}} C_{\beta_4\beta_2} + U_{\alpha_1\gamma} U_{\bar{\gamma}\beta_4} \int_{k'} \chi_{\gamma\bar{\gamma}} C_{\beta_3\beta_2} \right] \\
 &= 8 \times \int_{k'} [(U\chi U)_{\alpha_1\beta_3} C_{\beta_4\beta_2} + (U\chi U)_{\alpha_1\beta_4} C_{\beta_3\beta_2}]
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

où il est rappelé que les intégrales portent sur toutes les valeurs des pulsations et sur les impulsions comprises entre  $\Lambda/e^{\delta l}$  et  $\Lambda$ . D'autre part,  $\chi$  désigne  $\chi(k')$  et  $C$ ,  $C(k+k')$ . Nous pouvons montrer qu'en un point de symétrie (c'est à dire



tel que  $k_2 = k_3 = k_4$ ,  $\Gamma^{(4)(1)}$  peut s'écrire :

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}^{(4)(1)}(k_1, k_2, k_2, k_2) = [B_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\beta_3\beta_4} + B_{\alpha_1\beta_3}\delta_{\beta_2\beta_4} + B_{\alpha_1\beta_4}\delta_{\beta_3\beta_2}] \cdot (2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k_1 + 3k_2) \quad (5.14)$$

où la matrice  $B$  a la symétrie rotationnelle (2.16). En effet, chacune des sous-classes de graphes (a) à (f) possède la structure (5.14). Pour le voir, il nous faut tout d'abord remarquer que les trois indices  $\beta$  jouent un rôle symétrique puisque qu'il y a sommation sur les permutations circulaires. Ensuite la symétrie rotationnelle (2.16) est conservée par les produits de matrices, et nous pouvons donc, pour les sous-classes (a), (b), (c) et (e), lire la structure (5.14) directement sur les expressions ci-dessus. En ce qui concerne les sous-classes (d) et (f), il nous faut sommer sur les permutations circulaires pour démontrer la propriété, celle-ci ne pouvant se voir qu'après avoir effectué le calcul.

Venons-en maintenant au calcul de renormalisation des paramètres. Nous devons calculer le terme constant de  $\Gamma^{(4)}$  dans un développement en puissances de  $i\omega$  et de  $\mathbf{q}$ , et donc évaluer les graphes avec des impulsions et des pulsations externes nulles. Ceci nous place en particulier en un point de symétrie des diagrammes, et la structure (5.14) est vérifiée. Ceci nous assure d'une part que le jeu de paramètres associé à  $\Gamma^{(4)}$  est stable par renormalisation (au moins à l'ordre d'une boucle), et d'autre part qu'il nous suffit de calculer  $\Gamma_{\tilde{1}111}^{(4)(1)}(0, 0, 0, 0)$  et  $\Gamma_{\tilde{2}111}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0)$  pour connaître tous les termes du tenseur  $\Gamma^{(4)(1)}$  en zéro. Les variations des paramètres  $u$  et  $u_a$  dans les expressions (4.11) et (4.26) sont alors données par :

$$\begin{aligned} (2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(0)\delta u &= \frac{1}{6}\Gamma_{\tilde{1}111}^{(4)(1)}(0, 0, 0, 0) \\ (2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(0)\delta u_a &= \frac{1}{6}\Gamma_{\tilde{2}111}^{(4)(1)}(0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (5.15)$$

D'autre part, dans le cas où les impulsions externes sont nulles, nous pouvons écrire :

$$\int_{k'} \chi_{\gamma\bar{\gamma}} C_{\bar{\sigma}\sigma} = \int_{k'} \chi_{\gamma\bar{\gamma}}(k') C_{\bar{\sigma}\sigma}(k') = \int_{\mathbf{q}'} \int dt' \chi_{\gamma\bar{\gamma}}(\mathbf{q}', t') C_{\bar{\sigma}\sigma}(\mathbf{q}', -t') \quad (5.16)$$

et nous obtenons, après sommation sur toutes les sous-classes topologiques de graphes, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{1}111}^{(4)(1)}(0, 0, 0, 0) &= -24 \left\{ 3u \int (\chi UC)_{11} \right. \\ &\quad \left. + \int (UC^t)_{11} (U\chi)_{11} + \int (U^2\chi)_{11} C_{11} \right\} (2\pi)^{d+1}\delta^{(d+1)}(0) \\ \Gamma_{\tilde{2}111}^{(4,1)}(0, 0, 0, 0) &= -24 \left\{ 2u_a \int (\chi UC)_{11} \right. \\ &\quad \left. + u_a \int (\varepsilon\chi UC)_{21} + \int (U\chi)_{11} (UC^t)_{21} + \int (U^2\chi)_{21} C_{11} \right\} (2\pi)^{d+1}\delta^{(d+1)}(0) \end{aligned} \quad (5.17)$$

où  $\int$  doit être compris comme  $\int_{\mathbf{q}'} \int_0^\infty dt'$ ,  $C$  comme  $C(\mathbf{q}', -t')$  et  $\chi$  comme  $\chi(\mathbf{q}', t')$ . Ceci nous donne les expressions finales de  $\delta u$  et  $\delta u_a$  :

- dans la version où l'on garde  $\omega_0$  :

$$\begin{aligned}\delta u &= -2D \int_{\mathbf{q}} \frac{u^2(5R^2 + 4\Omega_0^2) - u_a^2 R^2 + 2uu_a R\Omega_0}{R^2(\Omega_0^2 + R^2)} \\ \delta u_a &= +2D \int_{\mathbf{q}} \frac{(u^2 - u_a^2)\Omega_0 R - 2uu_a(2\Omega_0^2 + 3R^2)}{R^2(\Omega_0^2 + R^2)}\end{aligned}\quad (5.18)$$

- et dans l'autre version :

$$\begin{aligned}\delta u &= -2D \int_{\mathbf{q}} \frac{u^2(5R^2 + 4(c_a \mathbf{q}^2)^2) - u_a^2 R^2 + 2uu_a R c_a \mathbf{q}^2}{R^2((c_a \mathbf{q}^2)^2 + R^2)} \\ \delta u_a &= +2D \int_{\mathbf{q}} \frac{(u^2 - u_a^2) R c_a \mathbf{q}^2 - 2uu_a(2(c_a \mathbf{q}^2)^2 + 3R^2)}{R^2((c_a \mathbf{q}^2)^2 + R^2)}\end{aligned}\quad (5.19)$$

Accompagnées des équations (5.3) et (5.4), ceci complète les expressions des variations infinitésimales non nulles des paramètres dont nous avons besoin pour dériver les équations de groupe de renormalisation au premier ordre en théorie des perturbations.

## 5.2 Equations de groupe de renormalisation et structure des points fixes de la théorie

Nous présentons ici les équations de groupe de renormalisation et la structure des points fixes de la théorie à l'ordre d'une boucle, déduites des calculs précédents. Nous savons que les résultats généraux sont obtenus par la méthode qui consiste à éliminer  $\omega_0$  du jeu de paramètres renormalisés et nous commençons par présenter les résultats obtenus dans le cadre de cette méthode. Nous présentons toutefois dans la suite les équations obtenues si l'on conserve ce paramètre. Nous montrons la cohérence cette approche avec la précédente, ainsi que l'existence d'un point fixe pour une valeur infinie de ce paramètre  $\omega_0$  renormalisé, dont nous discutons l'interprétation.

### 5.2.1 Equations de groupe de renormalisation

Puisque les variations infinitésimales  $\delta D$ ,  $\delta \lambda_1$ ,  $\delta \lambda_2$ ,  $\delta c$  et  $\delta c_a$  sont nulles à l'ordre d'une boucle, les équations de transformation pour les paramètres  $c_a$ ,  $\theta$  et pour les facteurs  $Z$  sont triviales (voir les équations du paragraphe 4.3.2). Leur intégration est immédiate et conduit à :

$$\begin{aligned}c_a(b) &\equiv c_a \\ \theta(b) &\equiv 0 \\ Z_\omega(b) &\equiv Z(b) \equiv \tilde{Z}(b) \equiv 1\end{aligned}\quad (5.20)$$

5.2 Equations de groupe de renormalisation et structure des points fixes de la théorie

---

Il nous faut rappeler que nous avons choisi de fixer les valeurs des paramètres  $c$ ,  $D$  et  $\lambda$  constantes au cours de la procédure de renormalisation. Ainsi, aux équations précédentes, nous pouvons ajouter :

$$c(b) \equiv c \quad D(b) \equiv D \quad \lambda(b) \equiv 1 \quad (5.21)$$

Nous constatons à ce stade que l'un des paramètres de la théorie que nous n'avons *a priori* pas le droit de fixer ( $c_a$ ), se retrouve pouvoir prendre une valeur arbitraire au point fixe. La structure à l'ordre d'une boucle des points fixes contient donc un degré de liberté supplémentaire par rapport à la structure générale. Il s'agit là d'une spécificité du calcul à l'ordre d'une boucle, qui mène à un système d'équations hautement incomplet. Nous reviendrons en détails sur cette incomplétude dans le paragraphe 5.2.5.

Les expressions (4.32), donnant la variation infinitésimale des paramètres renormalisés, se réduisent, pour leur partie non triviale, à :

$$\begin{aligned} r(l + \delta l) &= e^{2\delta l} [r(l) + \delta r] \\ u(l + \delta l) &= e^{(4-d)\delta l} [u(l) + \delta u] \\ u_a(l + \delta l) &= e^{(4-d)\delta l} [u_a(l) + \delta u_a] \end{aligned} \quad (5.22)$$

accompagnées de l'équation découplée suivante :

$$\widehat{\omega}_0(l + \delta l) = e^{2\delta l} [\widehat{\omega}_0(l) + \delta \widehat{\omega}_0]$$

où nous utilisons les expressions (5.4) et (5.19). La dérivation de ces relations par rapport à  $\delta l$  prise en  $\delta l = 0$  mène aux équations de groupe de renormalisation, qui forment un système autonome d'équations différentielles autonome non linéaires couplées. En terme des variables réduites suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r/c\Lambda^2 & ; & & \bar{c}_a &= c_a/c \\ \bar{u} &= u/(c\Lambda^2)^2 & ; & & \bar{u}_a &= u_a/(c\Lambda^2)^2 & ; & \mathcal{D} = \frac{4D\Lambda^d}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)} \end{aligned} \quad (5.23)$$

et en dimension d'espace  $d = 4 - \varepsilon$ , ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} &= 2r + 2\mathcal{D} \frac{u}{1+r} \\ \frac{du}{dl} &= \varepsilon u - \mathcal{D} \left[ \frac{(u^2 - u_a^2)(1+r) + 2uu_a c_a}{(1+r)[c_a^2 + (1+r)^2]} + \frac{4u^2}{(1+r)^2} \right] \\ \frac{du_a}{dl} &= \varepsilon u_a + \mathcal{D} \frac{c_a}{1+r} \left[ \frac{(u^2 - u_a^2)(1+r) + 2uu_a c_a}{(1+r)[c_a^2 + (1+r)^2]} \right] - 6\mathcal{D} \frac{uu_a}{(1+r)^2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

où nous avons noté les variables réduites comme les anciennes. A cela, il nous faut ajouter l'équation d'évolution pour le paramètre  $\omega_0(b)$  qui intervient dans l'expression des fonctions de corrélation et de réponse 4.39. Cette évolution est donné par l'intégration de l'équation suivante :

$$\frac{d\omega}{dl} = 2\mathcal{D} \frac{u_a}{1+r} e^{-2l} \quad (5.25)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned}\omega(l=0) &= \omega_0^{(0)}/(c\Lambda^2) \\ \omega_0(b) &= c\Lambda^2\omega(l=\ln b)\end{aligned}$$

Ce calcul, après intégration des équations de groupe de renormalisation (5.24), se résume à un calcul de primitive.

### 5.2.2 Points fixes et linéarisation

Nous avons déjà signalé l'importance des points fixes des équations de groupe de renormalisation, et des équations linéarisées qui les accompagnent. Nous nous proposons donc de les déterminer pour le système (5.24). Rappelons à ce stade que le calcul des équations de groupe de renormalisation se fait perturbativement dans les puissances des constantes de couplage  $u$  et  $u_a$ . Ainsi les points fixes acceptables sont seulement ceux pour lesquels les valeurs de ces paramètres sont des infiniment petits au point fixe. Nous cherchons donc uniquement les points fixes perturbativement en puissances de  $\varepsilon$ . Nous trouvons au total deux points fixes.

Le premier est le point fixe de la théorie gaussienne, et correspond à une valeur nulle de tous les paramètres. Les équations linéarisées autour de ce point fixe s'écrivent :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 2\mathcal{D} \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta u \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dl} \delta u_a &= \varepsilon \delta u_a\end{aligned}\tag{5.26}$$

Le point fixe gaussien est donc stable dans les directions  $u$  et  $u_a$  en dimension plus grande que 4, et instable dans toutes les directions en dimension inférieure à 4, ce que nous avons déjà dérivé par une simple analyse dimensionnelle (voir les équations (4.5)). Nous retrouvons l'argument standard du paragraphe 4.1.3) assurant que la théorie champ moyen donne les bonnes lois d'échelle en dimension supérieure à 4.

Le second point fixe est donné par les valeurs suivantes :

$$\bar{r}^* = -\frac{\varepsilon}{5} \quad \bar{u}^* = \frac{\varepsilon}{5\mathcal{D}} \quad \bar{u}_a^* = \bar{c}_a \frac{\varepsilon}{5\mathcal{D}}\tag{5.27}$$

et les équations linéarisées associées s'écrivent :

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta u \\ \delta u_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1 - \varepsilon/5) & 2\mathcal{D} & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 \\ 0 & -4\bar{c}_a\varepsilon/5 & -\varepsilon/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta u \\ \delta u_a \end{pmatrix}\tag{5.28}$$

Ce point fixe n'existe qu'en dimension inférieure à 4, puisque le paramètre  $u$  est positif dans le problème. Les valeurs propres de cette matrice sont  $2(1 - \varepsilon/5)$ ,  $-\varepsilon$  et  $-\varepsilon/5$ , et le point fixe ne possède qu'une direction instable, associée au paramètre de contrôle de la transition de phase. Il décrit donc la transition de phase en dimension inférieure à 4. Les valeurs des paramètres  $u$  et  $u_a$  au point

fixe sont différentes de zéro, et nous nous attendons à ce que les comportements d'échelle soient en désaccord par rapport aux comportements prévus par la théorie champ moyen (les arguments présentés dans le paragraphe 4.1.3 n'étant alors pas valides).

Remarquons que nous avons omis de préciser les ordres négligés dans l'écriture de la matrice des équations linéarisées (5.28). Il serait plus correct d'écrire la matrice sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 2(1 - \varepsilon/5) & 2\mathcal{D} & O(\varepsilon) \\ a_1\varepsilon^2 & -\varepsilon & O(\varepsilon^2) \\ a_2\varepsilon^2 & -4\bar{c}_a\varepsilon/5 & -\varepsilon/5 \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

où nous précisons ce que nous négligeons, avec la convention suivante : " $a\varepsilon^n$  signifie  $a\varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1})$ ". Nous constatons que nous négligeons des termes d'ordre  $\varepsilon$  dans l'expression des coefficients de la matrice, qui ne sont accessibles qu'à l'ordre de deux boucles. Toutefois, la présence de ces termes ne modifie pas le fait que la seule valeur propre positive de la matrice est  $2(1 - \varepsilon/5)$ , et n'affecte donc pas les exposants critiques à l'ordre  $\varepsilon$ . Nous pouvons aussi remarquer que nos équations de groupe (5.24) nous permettent de calculer  $a_1$  et  $a_2$ . Le résultat surprenant est qu'ils ne dépendent que de manière triviale du paramètre  $c_a$ . Nous avons :

$$a_1 = \frac{2}{5\mathcal{D}} \quad a_2 = \frac{11}{25\mathcal{D}}\bar{c}_a \quad (5.30)$$

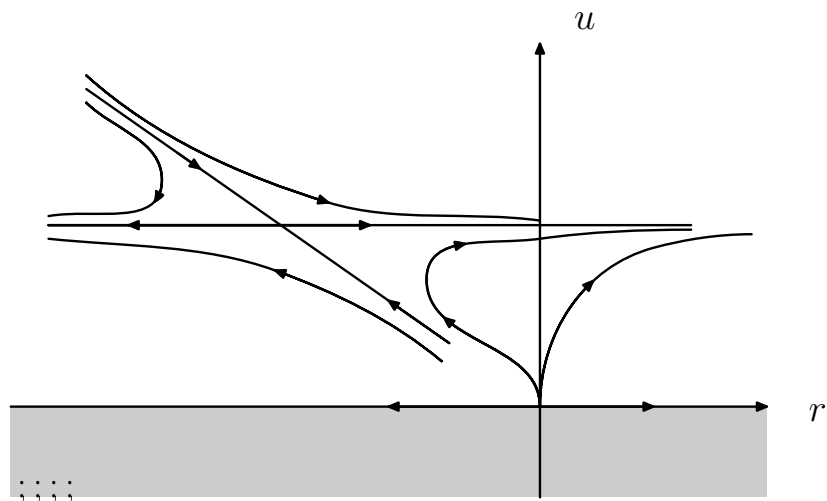
Notons enfin la remarque standard suivante sur la cohérence du développement en  $\varepsilon$  de la théorie de Wilson : Comme les valeurs des constantes de couplage  $u$  et  $u_a$  sont d'ordre  $\varepsilon$  au point fixe, le développement en puissances des constantes de couplage est équivalent à un développement en puissances de  $\varepsilon = 4 - d$ . L'analyse que nous venons de faire n'est donc valable qu'au voisinage de la dimension 4, dimension au-dessus de laquelle la théorie champ moyen donne des prédictions correctes. Ainsi, le développement perturbatif en puissances des constantes de couplage est-il équivalent à un développement perturbatif au voisinage de la dimension 4, lui-même équivalent à un développement perturbatif autour de la théorie champ moyen. La cohérence de la démarche est donc assurée.

### 5.2.3 Diagramme de Flot et exposants critiques

Le diagramme de flot constitue, pour notre théorie à l'ordre d'une boucle en théorie des perturbations, un diagramme en trois dimensions, associées aux paramètres  $r$ ,  $u$  et  $u_a$  dont l'évolution est décrite par les équations (5.24). Pour le représenter, nous avons choisi d'effectuer une projection des lignes de flot sur le plan  $(r, u)$  (voir Fig. 5.1).

Les comportements asymptotiques définis dans le paragraphe 4.3.3 sont donnés par des lois d'échelle, que nous pouvons toutes exprimer à l'aide de quatre exposants critiques indépendants, traditionnellement nommés  $\nu$ ,  $z$ ,  $\eta$  et  $\tilde{\eta}$ . Trois d'entre eux sont liés aux facteurs  $Z$  par la relation (4.40), et  $\nu$  est égal à l'inverse de la valeur propre positive de la matrice des équations de groupe de renormalisation linéarisées. Les trois exposants associés aux facteurs  $Z$  sont donnés par :

$$z = 2 \quad \eta = 0 \quad \tilde{\eta} = 0 \quad (5.31)$$



**FIG. 5.1:** Projection des lignes de flot décrites par les équations de groupe de renormalisation (5.24) dans le plan  $(r, u)$ . Le point fixe décrivant la transition est celui qui ne possède qu'une seule direction instable à la transition, et a pour coordonnées  $(-\frac{\varepsilon}{5}, \frac{\varepsilon}{20\mathcal{D}})$ . Le point fixe gaussien  $(0,0)$  est répulsif dans les deux directions. Les flèches indiquent la direction de l'évolution du jeu de paramètres le long d'une ligne de flot. Toutes les théories dont le jeu de paramètre se trouve sur une même ligne de flot ont le même comportement de grande échelle.

Ils ne sont pas modifiés par rapport à leur valeur calculée dans le cadre de la théorie champ moyen.

En dimension plus grande que 4, la valeur propre positive du système (5.28) vaut  $1/2$ , et  $\nu = 2$ . Nous retrouvons la valeur de l'exposant critique du champ moyen. En dimension plus petite que 4, nous avons :

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{10} \quad (5.32)$$

Cette expression comporte une correction d'ordre  $\varepsilon$  qui met en défaut la théorie champ moyen. Nous pouvons en revanche remarquer que cet exposant est indépendant de la valeur de  $c_a$  au point fixe, et est en particulier égal à l'exposant  $\nu$  de la théorie du modèle  $O(2)$  dynamique. Ce résultat, à partir du moment où l'indépendance vis à vis de  $c_a$  est établie, ne doit pas nous surprendre. En effet, nous avons déjà signalé que dans le cas où les valeurs des paramètres  $c_a$  et  $u_a$  étaient zéro, le passage dans le référentiel oscillant à la fréquence  $\omega_0$  permettait d'établir une analogie exacte avec le modèle relaxationnel  $O(2)$  (voir le paragraphe 2.4.2). Dans la procédure de renormalisation où nous éliminons le paramètre  $\omega_0$  des équations de groupe de renormalisation, nous devons donc retrouver le groupe de renormalisation du modèle  $O(2)$  comme cas particulier. En particulier, nous devons retrouver le point fixe et les exposants critiques associés à cette théorie. Puisque notre exposant critique ne dépend pas de la valeur de  $c_a$  au point fixe, il doit être égal à l'exposant du modèle  $O(2)$  associé au cas particulier du point fixe  $c_a = 0$ . Nous constatons donc la cohérence de notre résultat au regard des théories connues.

### 5.2.4 Résultats obtenus en conservant $\omega_0$ et cohérence de la théorie

Dans le cadre de cette méthode, les expressions non triviales pour les paramètres renormalisés (4.17) se réduisent à :

$$\begin{aligned} r(l + \delta l) &= e^{2\delta l}[r(l) + \delta r] \\ \omega_0(l + \delta l) &= e^{2\delta l}[\omega_0(l) + \delta\omega_0] \\ u(l + \delta l) &= e^{(4-d)\delta l}[u(l) + \delta u] \\ u_a(l + \delta l) &= e^{(4-d)\delta l}[u_a(l) + \delta u_a] \end{aligned} \quad (5.33)$$

avec les expressions (5.3) et (5.18). En termes des variables réduites (5.23), auxquelles il faut ajouter  $\bar{\omega}_0 = \omega_0/c\Lambda^2$ , et en dimension d'espace  $d = 4 - \varepsilon$ , les équations de groupe de renormalisation obtenues dans le cadre de cette méthode s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dl} &= 2r + 2\mathcal{D}\frac{u}{1+r} \\ \frac{d\omega_0}{dl} &= 2\omega_0 + 2\mathcal{D}\frac{u_a}{1+r} \\ \frac{du}{dl} &= \varepsilon u - \mathcal{D} \left[ \frac{(u^2 - u_a^2)(1+r) + 2uu_a(\omega_0 + c_a)}{(1+r)[(\omega_0 + c_a)^2 + (1+r)^2]} + \frac{4u^2}{(1+r)^2} \right] \\ \frac{du_a}{dl} &= \varepsilon u_a + \mathcal{D}\frac{\omega_0 + c_a}{1+r} \left[ \frac{(u^2 - u_a^2)(1+r) + 2uu_a(\omega_0 + c_a)}{(1+r)[(\omega_0 + c_a)^2 + (1+r)^2]} \right] - 6\mathcal{D}\frac{uu_a}{(1+r)^2} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Nous retrouvons l'équivalent des deux points fixes obtenus dans le cadre de la méthode précédente : le point fixe gaussien, qui correspond à une valeur nulle de tous les paramètres, ceux-ci comprenant cette fois  $\omega_0$ , et le point fixe d'ordre  $\varepsilon$ , donné par :

$$\bar{r}^* = -\frac{\varepsilon}{5} \quad \bar{u}^* = \frac{\varepsilon}{5\mathcal{D}} \quad \bar{u}_a^* = \bar{c}_a \frac{\varepsilon}{5\mathcal{D}} \quad \bar{\omega}_0^* = -\bar{c}_a \frac{\varepsilon}{5\mathcal{D}}$$

Au voisinage de ce point fixe non trivial, les équations linéarisées s'écrivent :

$$\frac{d}{dl} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta u \\ \delta u_a \\ \delta \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1 - \varepsilon/5) & 2\mathcal{D} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -4\bar{c}_a\varepsilon/5 & -\varepsilon/5 & 0 \\ -2\bar{c}_a\varepsilon/5 & 0 & 2\mathcal{D}(1 + \varepsilon/5) & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta u \\ \delta u_a \\ \delta \omega_0 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

Pour les deux points fixes que nous obtenons ici, il existe une direction instable supplémentaire par rapport au nombre de directions instables obtenues dans le paragraphe 5.2.2. Comme nous l'avons d'ores et déjà signalé (paragraphe 4.2.5), il nous faut choisir précisément la valeur du paramètre  $\omega_0$  pour nous placer sur la surface critique, qui est ici de co-dimension deux. Ce choix ayant été effectué, nous retrouvons exactement les valeurs point fixe (5.27) ainsi que les équations de groupe linéarisées (5.28). Le point fixe obtenu ici constitue donc bien un cas particulier du précédent.

Notons enfin que nous trouvons un point fixe associé à une valeur infinie du paramètre  $\omega_0$  renormalisé. En effet, en posant  $T_0 = 1/\omega_0$ , nous obtenons un point fixe pour les valeurs suivantes des paramètres :

$$\bar{r}^* = -\frac{\varepsilon}{4} \quad \bar{u}^* = \frac{\varepsilon}{4\mathcal{D}} \quad \bar{u}_a^* \text{ quelconque} \quad \bar{T}_0^* = 0$$

L'interprétation que nous pouvons donner à l'existence de ce point fixe est un peu similaire à celle que l'on pourrait donner au point fixe du groupe de renormalisation associé à une longueur de corrélation nulle pour un système de spins (ou d'oscillateurs). Le point de longueur de corrélation zéro est un point fixe du groupe de renormalisation, et il lui est bien associé une invariance d'échelle. En revanche, il correspond à une physique de spins (ou d'oscillateurs) totalement découplés. Dans un système ferromagnétique, il correspond à une valeur infinie de la température du système. Il n'est donc pas associé à une transition de phase, et son étude ne mérite donc pas grande attention. Dans le cadre de la méthode où l'on garde  $\omega_0$ , les paramètres  $r$  et  $\omega_0$  jouent mathématiquement le même rôle. Ainsi le point fixe associé à une valeur infinie du paramètre  $\omega_0$  est-il le strict analogue mathématique du point de longueur de corrélation zéro. Toutefois, son interprétation physique semble moins clair : il correspondrait en effet à une pulsation infinie des oscillations à la transition...

### 5.2.5 Insuffisance des résultats et nécessité des calculs à l'ordre de deux boucles

Nous avons constaté à plusieurs endroits que la structure du groupe de renormalisation était incomplète à l'ordre d'une boucle en théorie des perturbations. Ceci se voit d'une part à travers les facteurs  $Z$  qui gardent une valeur 1 et la phase  $\theta$  qui garde une valeur nulle. Nous avons également vu que la structure à l'ordre d'une boucle possédait un degré de liberté supplémentaire dans la paramétrisation des points fixes par rapport à la structure générale. De plus, trois des quatre exposants critiques indépendants de la théorie ne sont pas renormalisés à cet ordre en théorie de perturbations. Toutes ces propriétés sont des artefacts du premier ordre, qui ne donne pas de variations primitives pour de nombreux paramètres. Cela est dû au fait que le diagramme associé à  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2)}$  est zéro à cet ordre, et que celui associé à  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)}$  est indépendant des moments externes. La structure du groupe de renormalisation est donc *qualitativement* incorrecte à cet ordre en théorie des perturbations.

A l'ordre de deux boucles on trouve des diagrammes contribuant de façon non triviale à  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2)}$  et à la dépendance dans les moments externes de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)}$ . Par conséquent, nous nous attendons à ce que la structure des points fixes soit qualitativement modifiée à l'ordre de deux boucles, et que les équations de groupe de renormalisation imposent au paramètre  $c_a$  de prendre une valeur précise au point fixe. Remarquons que pour obtenir ce changement qualitatif du comportement, nous n'avons besoin que de la première correction en  $\varepsilon$  à toutes les quantités que nous calculons. En effet, nous obtenons un système d'équations cohérent en ne calculant à l'ordre de deux boucles que les quantités qui ne sont



pas renormalisées à l'ordre d'une boucle. En particulier, nous ne devons pas renormaliser le vertex d'interaction  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4)}$  à l'ordre de deux boucles.

Nous savons que nous devons retrouver comme cas particulier, dans le référentiel oscillant, le point fixe du modèle  $O(2)$  dynamique à tout ordre en théorie des perturbations. Les valeurs  $c_a = 0$ ,  $u_a = 0$  doivent par conséquent correspondre à un point fixe de notre groupe de renormalisation. Nous avons vu au paragraphe 2.4.3 que, dans ce cas, nous pouvons dériver une relation généralisée de la relation Fluctuation-Dissipation pour la dynamique oscillante. Ce fait est dû à une restauration de symétrie pour la théorie lorsque les valeurs des paramètres  $c_a$  et  $u_a$  sont nulles. Cette restauration de symétrie au point critique  $c_a^* = 0$  (ce qui impose, d'après notre calcul à l'ordre d'une boucle,  $u_a^* = 0$ ), n'a donc aucune raison d'être un fait général, et nous nous attendons à trouver d'autres points fixes. Nous souhaitons savoir combien il en existe, quelle est leur stabilité, et quels sont les exposants critiques associés. Le calcul à l'ordre de deux boucles est indispensable pour répondre à ces questions.



## Chapitre 6

# Calcul perturbatif à l'ordre de deux boucles

Dans ce chapitre, nous dérivons les équations de groupe de renormalisation à l'ordre de deux boucles dans le cadre de la technique de Callan-Symanzik. Pour cela, nous suivons les principes de calcul exposés dans la section 4.5. En particulier, nous savons que le point fixe général d'une transition de phase oscillante est obtenu lorsque l'on élimine le paramètre  $\omega_0$  des équations de groupe de renormalisation, en définissant les champs renormalisés dans un référentiel oscillant à une fréquence effective. Nous allons présenter les calculs dans ce cadre, dont on sait qu'il donne des résultats plus riches que la méthode qui conserve ce paramètre. Dans la section 6.1, nous commençons par préciser les règles de représentation diagrammatique spécifiques à cette technique, qui comporte des graphes supplémentaires par rapport à la technique de Wilson, et qui sont associés aux contre-termes. Nous développons ensuite sous forme de diagrammes de Feynman les différents vertex propres que nous devons renormaliser (paragraphe 6.1.2). Dans la section 6.2, nous donnons les grandes lignes du calcul des diagrammes de Feynman dont nous aurons besoin pour dériver les équations de groupe de renormalisation. De façon à disposer d'un jeu d'équations complet et cohérent dans le cadre de cette technique, nous calculons l'expression de tous les diagrammes de Feynman intervenant dans la renormalisation des paramètres, aux ordres associés à la première correction non triviale en théorie des perturbations. A l'ordre de deux boucles, nous insistons sur une difficulté technique propre à notre calcul, qui mène à l'intégration multiple de fractions rationnelles à valeurs complexes. Enfin nous donnons le système d'équations complet donnant la première correction non triviale à la renormalisation de tous les facteurs  $Z$  de la théorie. Les équations de groupe de renormalisation à l'ordre de deux boucles seront données dans le chapitre 7.

## 6.1 Théorie des perturbations et représentations diagrammatiques

### 6.1.1 Conventions graphiques

Nous présentons dans ce paragraphe les conventions de représentation graphique associées à la décomposition de l'action de la théorie qui a été présentée dans les équations (4.64) à (4.67).

Les termes provenant de l'action renormalisée (4.65) sont représentés selon des conventions semblables à celles déjà utilisées dans le cadre de la méthode de Wilson. Un champ  $\varphi$  sera représenté par :

—

et un champ  $\tilde{\varphi}$  par :

⚡⚡⚡⚡

Nous avons deux propagateurs libres, dont les expressions dans l'espace de Fourier et les représentations graphiques sont données par :

$$\begin{aligned}
 C_{\alpha\beta}(k) = C_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{k}{\alpha \quad \beta} = \frac{k}{\alpha \quad \beta} \\
 &= \frac{2D}{|\Delta|^2} \begin{pmatrix} \omega^2 + (c_a \mathbf{q}^2)^2 + (c \mathbf{q}^2)^2 & 2i\omega c_a \mathbf{q}^2 \\ -2i\omega c_a \mathbf{q}^2 & \omega^2 + (c_a \mathbf{q}^2)^2 + (c \mathbf{q}^2)^2 \end{pmatrix} \\
 \chi_{\alpha\beta}(k) = \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{k}{\alpha \quad \beta} = \frac{k}{\alpha \quad \beta} \\
 &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -i\omega + c \mathbf{q}^2 & c_a \mathbf{q}^2 \\ -c_a \mathbf{q}^2 & -i\omega + c \mathbf{q}^2 \end{pmatrix} \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Le vertex d'interaction est :

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \alpha \quad \beta \\ \diagdown \quad / \\ \bullet \\ / \quad \diagdown \\ \gamma \quad \delta \end{array} &= -\mu'^{\varepsilon} (4\pi)^{-\varepsilon/2} G_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

où

$$G_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g & -g_a \\ g_a & g \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Les deux autres parties de l'action sont spécifiques à cette technique, et requièrent l'introduction d'autres symboles ou conventions graphiques. Les contre-

termes associés à l'action (4.66) s'écrivent :

$$\begin{array}{c} k \\ \text{~~~~~} \bullet \text{~~~~~} \\ \alpha \qquad \qquad \beta \end{array} = D(Z_\omega \tilde{Z} - 1) \delta_{\alpha\beta} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} k \\ \text{~~~~~} \bullet \text{-----} \\ \alpha \qquad \qquad \beta \end{array} &= - \left[ i\omega \left( Z_\omega^2 \sqrt{Z\tilde{Z}} \cos \theta - 1 \right) \right. \\ &+ c\mathbf{q}^2 \left( Z_\omega \sqrt{Z\tilde{Z}} \cos \theta - Z_\omega \sqrt{Z\tilde{Z}} \frac{c_a}{c} Z_{c_a} \sin \theta - 1 \right) \left. \right] \delta_{\alpha\beta} \\ &- \left[ i\omega \left( Z_\omega^2 \sqrt{Z\tilde{Z}} \sin \theta \right) + c_a \mathbf{q}^2 \left( Z_\omega \sqrt{Z\tilde{Z}} Z_{c_a} \cos \theta - Z_\omega \sqrt{Z\tilde{Z}} \frac{c}{c_a} \sin \theta - 1 \right) \right] \varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{array}{c} \alpha \qquad \beta \\ \text{~~~~} \bullet \\ \gamma \qquad \delta \end{array} = -\mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} \left[ g \left( Z_u Z_\omega^3 \cos \theta - 1 \right) - g_a \left( Z_{u_a} Z_\omega^3 \sin \theta \right) \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \\ - \mu'^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} \left[ g_a \left( Z_{u_a} Z_\omega^3 \cos \theta - 1 \right) + g \left( Z_u Z_\omega^3 \sin \theta \right) \right] \varepsilon_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \quad (6.6)$$

et les termes perturbatifs associés à l'action (4.67) s'écrivent :

$$\begin{array}{c} k \qquad \tilde{q} \\ \text{~~~~~} \bullet \text{-----} \\ \alpha \qquad \qquad \beta \end{array} = -r \sqrt{Z\tilde{Z}} Z_\omega Z_r \cos \theta \delta_{\alpha\beta} \\ - \sqrt{Z\tilde{Z}} Z_\omega \left( -\delta\omega_0 + r Z_r \sin \theta \right) \varepsilon_{\alpha\beta} \quad (6.7)$$

avec  $\delta\omega_0 = Z_\omega^{-1} \delta\tilde{\omega}_0$ .

Il faut noter que dans les expressions données ci-dessus sont sous-entendus des distributions de Dirac assurant la conservation des moments. Les principes de construction des diagrammes sont ici les mêmes que ceux qui sont exposés dans l'annexe C.

### 6.1.2 Expression diagrammatique des vertex propres

Les vertex propres de la théorie se développent en diagrammes 1-particule irréductibles sans propagateurs externes. Ceux-ci peuvent ou non faire intervenir les contre-termes de l'action (4.66) et les termes de l'action (4.67), qui sont tous traités perturbativement. Dans le cadre du schéma minimal que nous utilisons [2, 91, 150], les facteurs  $Z$  issus des contre-termes sont définis de telle sorte qu'ils absorbent les divergences présentes dans les diagrammes lorsque  $\varepsilon$

tend vers 0. Par conséquent, les contre-termes sont nuls à l'“ordre des arbres” (ordre zéro boucle), et l'introduction d'un contre-terme dans un diagramme augmente donc son ordre en théorie de perturbations d'une unité. En revanche, les termes associés au diagramme (6.7) sont inclus dans une série perturbative éliminant ordre par ordre ses propres divergences. De ces observations, on déduit que l'expression des facteurs  $Z$  contenus dans l'action (4.66) a la structure  $Z = 1 + O(g, g_a)$ , et que la phase  $\theta$  sera d'ordre au moins 1 en  $g$  et  $g_a$ . Ceci est en accord avec la nécessité qu'à l'ordre des arbres les quantités nues et renormalisées soient identiques. Pour les grandeurs  $Z_r$  et  $\delta\omega_0$ , c'est cette nécessité seule qui nous permet de fixer  $Z_r$  et  $\delta\omega_0$  à l'ordre zéro en puissances de  $g$  et  $g_a$ . Ces valeurs doivent être prises respectivement égales à 1 et 0.

Ces propriétés ayant été rappelées, nous pouvons écrire les expressions des vertex propres à l'ordre du premier terme perturbatif non trivial dans un développement en puissances de  $g$  et  $g_a$ . Nous notons  $\Gamma_{\{\tilde{\alpha}_i\beta_j\}}^{(\tilde{N}+N,L)(n)}$  le terme perturbatif d'ordre  $n$  boucles du vertex propre contenant  $\tilde{N}$  pattes externes  $\tilde{\varphi}_{\alpha_i}$ ,  $N$  pattes externes  $\varphi_{\beta_j}$  et  $L$  insertions  $[\tilde{\varphi}_{\alpha}\varphi_{\alpha}]$ . Avec ces notations, et d'après les résultats du paragraphe 4.5.3, les seuls vertex propres que nous devons renormaliser sont : les termes constants de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4,0)(n)}$ ,  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,1)(n)}$  et  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2,0)(n)}$ , ainsi que les termes linéaires en  $i\omega$  et  $\mathbf{q}^2$  de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,0)(n)}$ , qui seront cherchés comme les dérivées en zéro de ces diagrammes.

Nous pouvons maintenant écrire les développements des vertex propres qui nous intéressent aux ordres utiles, à savoir aux ordres incluant la première correction non triviale à la théorie Champ Moyen. A l'ordre d'une boucle nous avons :

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}^{(4,0)(1)}(k_1, k_2, k_3, k_4) = -\frac{1}{2} \left[ \text{diagramme 1} \right] - \left[ \text{diagramme 2} \right] \quad (6.8)$$

avec la décomposition :

$$\left[ \text{diagramme 1} \right] = \left[ \text{diagramme 1.1} \right] + \left[ \text{diagramme 1.2} \right] + \left[ \text{diagramme 1.3} \right] \quad (6.9)$$

et une décomposition semblable pour le contre-terme. Les diagrammes doivent être affectés du bon facteur de symétrie. Dans cette équation, nous avons noté  $i$  le couple  $(\alpha_i, k_i)$ . Chacun des graphes de l'équation (6.9) se décompose selon l'équation (5.6) vue dans le cadre de la méthode Wilson, et nous retrouvons naturellement les mêmes facteurs de symétrie. Le deuxième vertex propre ayant

un développement non trivial à l'ordre d'une boucle est :

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2,1)(1)}(k, \bar{q}) = - \left[ \text{diagram 1} - \text{diagram 2} \right] \quad (6.10)$$

avec la décomposition :

$$\text{diagram} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} \quad (6.11)$$

Les autres termes ont un développement trivial à l'ordre d'une boucle. Comme nous l'avons d'ores et déjà justifié, il est cohérent de développer ces termes à l'ordre de deux boucles, tout en ne gardant que les termes d'ordre un pour les développements qui précèdent. A l'ordre de deux boucles nous trouvons les développements suivants :

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2,0)(2)}(k) = -\frac{1}{2} \left[ \text{diagram 1} - \text{diagram 2} \right] \quad (6.12)$$

avec les bons facteurs de symétrie, le facteur  $\frac{1}{2}$  provenant du développement de l'exponentielle. Le diagramme comporte deux sous-classes topologiques différentes :

$$\begin{aligned} \text{diagram} &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} \\ &= (a) + (b) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Nous avons également :

$$\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2,0)(2)}(k) = -\frac{1}{2} \left[ \text{diagram 1} - \text{diagram 2} \right] \quad (6.14)$$

avec les mêmes remarques sur les facteurs de symétrie et le facteur  $\frac{1}{2}$ . Le dia-

gramme comporte cinq sous-classes topologiques différentes :

The diagrammatic equation (6.15) shows a two-loop diagram on the left, which is equal to the sum of five other two-loop diagrams on the right. The diagrams are labeled (c) through (g) in the final equation. The diagrams consist of two external lines (one wavy, one straight) and two internal loops (one wavy, one straight).

$$= (c) + (d) + (e) + (f) + (g) \quad (6.15)$$

## 6.2 Calcul des facteurs $Z$

Dans cette section, nous donnons les grandes lignes du calcul menant à l'expression des facteurs  $Z$  de la théorie au premier ordre non trivial en théorie des perturbations. Les expressions des diagrammes à l'ordre d'une boucle sont bien sûr très similaires à celles obtenues dans le cadre du schéma de renormalisation de Wilson. Il y a cependant deux différences majeures : la première est qu'ici les intégrales spatiales portent sur tout l'espace, alors que dans le schéma précédent l'intégration n'était effectuée que sur une couche d'impulsions ; la seconde est que le schéma minimal nous donne des corrections correspondant aux diagrammes associés à la théorie critique (ou de "masse nulle"), et qu'il nous faut alors prendre garde aux divergences infra-rouges. Ceci nous oblige à calculer les diagrammes dans une "configuration non exceptionnelle" des moments externes, c'est à dire telle qu'aucune somme partielle des  $\mathbf{q}_i$  externes n'est nulle :

$$\sum_{i \in I} \mathbf{q}_i \neq 0 \quad \forall I \quad (6.16)$$

Nous devons cependant, dans le résultat final, prendre la limite dans laquelle les impulsions externes sont toutes égales à zéro. Celle-ci ne peut être prise qu'après calcul des diagrammes, et après avoir développé la série perturbative en puissances de  $\varepsilon$ . En revanche, les pulsations externes pourront être prises directement égales à zéro pour les graphes dont on ne doit calculer que le terme constant.

### 6.2.1 Renormalisation du vertex

Nous avons vu que seul  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4}^{(4,0)(1)}$  est à considérer. Pour les mêmes raisons que celles qui ont été exposées au chapitre 5,  $\Gamma^{(4,0)}$  a la symétrie (5.14) en un point de symétrie des moments externes. Comme nous ne sommes intéressés que par le terme constant de ce vertex propre dans un développement en puissances de ces moments externes, nous pouvons utiliser cette propriété. Nous savons alors que seuls  $\Gamma_{\tilde{1}111}^{(4,0)(1)}(k_1, k_2, k_2, k_2)$  et  $\Gamma_{\tilde{1}222}^{(4,0)(1)}(k_1, k_2, k_2, k_2)$  sont à calculer, les autres termes du tenseur se déduisant par symétrie. Les graphes à une boucle construits sans contre-terme ont des expressions analogues à (5.17). Le graphe



associé à  $\Gamma_{\tilde{1111}}^{(4,0)(1)}(k_1, k_2, k_2, k_2)$  a l'expression suivante :

$$\frac{3}{2} \times \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} = 24\mu'^{2\varepsilon}(4\pi)^{-\varepsilon} \left\{ 3g \int (\chi GC)_{11} + \int (GC^t)_{11} (G\chi)_{11} + \right. \\ \left. + \int (G^2\chi)_{11} C_{11} \right\} \cdot (2\pi)^{d+1} \delta^d(\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2) \delta(0) \quad (6.17)$$

et le graphe associé à  $\Gamma_{\tilde{1222}}^{(4,0)(1)}(k_1, k_2, k_2, k_2)$  s'écrit :

$$\frac{3}{2} \times \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} = 24\mu'^{2\varepsilon}(4\pi)^{-\varepsilon} \left\{ 2g_a \int (\chi GC)_{11} + g_a \int (\varepsilon\chi GC)_{21} + \right. \\ \left. + \int (G\chi)_{11} (GC^t)_{21} + \int (G^2\chi)_{21} C_{11} \right\} \cdot (2\pi)^{d+1} \delta^d(\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2) \delta(0) \quad (6.18)$$

Dans les expressions ci-dessus, nous avons pris pour les moments externes  $k_i$  les valeurs  $k_i = (\mathbf{q}_i, \omega_i = 0)$ . Le symbole  $\int$  doit être compris comme  $\int_{\mathbf{q}} \int_0^\infty dt$ ,  $C$  comme  $C(-2\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}, -t)$  et  $\chi$  comme  $\chi(\mathbf{q}, t)$ .

Pour faire le calcul complet, nous devons exprimer les produits de matrices en fonction de combinaisons d'intégrales aussi simples que possibles. Nous obtenons :

$$\frac{3}{2} \times \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 1 \end{array} = 24\mu'^{2\varepsilon}(4\pi)^{-\varepsilon} \left[ g^2 \left( \frac{1}{2}I + 2J \right) + g_a^2 \left( -\frac{1}{2}I \right) + 2gg_a \left( \frac{i}{2}I + iJ \right) + c.c. \right] \\ \frac{3}{2} \times \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} = 24\mu'^{2\varepsilon}(4\pi)^{-\varepsilon} \left[ g^2 \left( \frac{-i}{2}I \right) + g_a^2 \left( \frac{i}{2}I + 2iJ \right) + 2gg_a \left( \frac{1}{2}I + J \right) + c.c. \right] \quad (6.19)$$

où

$$I = I_d(c, c_a, \mathbf{q}) = \int_{\mathbf{p}} \frac{D}{c\mathbf{p}^2(c + ic_a) [\mathbf{p}^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2]} \\ J = J_d(c, c_a, \mathbf{q}) = \int_{\mathbf{p}} \frac{D}{c\mathbf{p}^2 [(c - ic_a)\mathbf{p}^2 + (c + ic_a)(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2]} \\ \mathbf{q} = 2\mathbf{q}_2 \quad (6.20)$$

et où les facteurs associés aux distributions de Dirac sont sous-entendus.

Etant données les équations (6.12) et (6.14), les contre-termes (6.4) et (6.5) sont zéros à l'ordre d'une boucle. Ceci nous fournit un système trivial de cinq équations à cinq inconnues, en conséquence duquel les facteurs  $Z$ ,  $\tilde{Z}$ ,  $Z_\omega$ ,  $Z_{c_a}$  et  $\theta$  ne contiennent pas de termes d'ordre un en  $g$  et  $g_a$ . Par conséquent, le contre-terme intervenant dans l'expression de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}^{(4,0)(1)}$  s'exprime à l'ordre d'une boucle en remplaçant  $Z_\omega$  par 1 et  $\theta$  par 0. Il est affecté d'un facteur de symétrie égal à 2. Avec les mêmes choix d'impulsions externes et les mêmes conventions de sommation que pour le graphe précédent, nous avons :

$$\begin{aligned}
 3 \times \begin{array}{c} 1 \\ \diagup \text{---} \text{---} \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \text{---} \text{---} \diagup \\ 1 \end{array} &= 6(-\mu'^\varepsilon)(4\pi)^{-\varepsilon/2} g(Z_u - 1) \cdot (2\pi)^{d+1} \delta^d(\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2) \delta(0) \\
 3 \times \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \text{---} \text{---} \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \text{---} \text{---} \diagup \\ 1 \end{array} &= 6(-\mu'^\varepsilon)(4\pi)^{-\varepsilon/2} g_a(Z_{u_a} - 1) \cdot (2\pi)^{d+1} \delta^d(\mathbf{q}_1 + 3\mathbf{q}_2) \delta(0)
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Le calcul des intégrales  $I$  et  $J$  est effectué à l'aide de l'identité de Feynman [2, 91]. La méthode permet de se ramener au calcul de l'intégrale d'une fraction rationnelle portant sur une ou plusieurs variables entre 0 et 1, et dépendant de la dimension de l'espace  $d$ . Les pôles des intégrales de Feynman en  $\varepsilon^{-1}$  apparaissent à travers la fonction  $\Gamma$  d'Euler, qui diverge pour les valeurs entières négatives de son argument. Comme nous l'avons justifié dans la section 4.5, et comme c'est usuellement le cas dans ce schéma de renormalisation, nous n'avons besoin que du pôle d'ordre un en  $\varepsilon^{-1}$  des intégrales. Le calcul donne les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_d(c, c_a, \mathbf{q}) &= \frac{D}{c(c + ic_a)} \frac{q^{d-4}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \int_0^1 \frac{x^{\frac{d-4}{2}}}{(1+x)^{d-2}} dx \\
 &= \frac{D}{c(c + ic_a)} \frac{1}{(4\pi)^2 (4\pi)^{-\varepsilon/2}} \frac{1}{\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\
 J_d(c, c_a, \mathbf{q}) &= \frac{D}{c} \frac{q^{d-4}}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \\
 &\quad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x+2cx)^2} \left[ x(c + ic_a) \frac{1-x+x(c-ic_a)}{(1-x+2cx)^2} \right]^{\frac{d-4}{2}} \\
 &= \frac{D}{c^2} \frac{1}{(4\pi)^2 (4\pi)^{-\varepsilon/2}} \frac{1}{\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon))
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

où  $q = |\mathbf{q}|$ . Nous pouvons maintenant calculer les facteurs  $Z_u$  et  $Z_{u_a}$ . Nous

avons :

$$\begin{aligned} Z_u &= 1 - 4D \frac{1}{\varepsilon \bar{\alpha}} \left[ \frac{\bar{\alpha}_a^2 - \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha}\bar{\alpha}_a\bar{c}_a}{1 + \bar{c}_a^2} - 4\bar{\alpha}^2 \right] + \mathcal{O}(g^2) \\ Z_{u_a} &= 1 - 4D \frac{1}{\varepsilon \bar{\alpha}_a} \left[ \frac{\bar{c}_a}{1 + \bar{c}_a^2} (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}_a^2 + 2\bar{\alpha}\bar{\alpha}_a\bar{c}_a) - 6\bar{\alpha}\bar{\alpha}_a \right] + \mathcal{O}(g^2) \end{aligned} \quad (6.23)$$

où nous avons noté :

$$\bar{\alpha} = \frac{g}{(4\pi)^2 c^2} \quad ; \quad \bar{\alpha}_a = \frac{g_a}{(4\pi)^2 c^2} \quad ; \quad \bar{c}_a = \frac{c_a}{c} \quad (6.24)$$

### 6.2.2 Renormalisation de la masse et de la fréquence

Le calcul de  $\Gamma^{(2,1)(1)}$  n'est pas strictement identique au calcul de  $\Gamma^{(4,0)(1)}$ , mais demande à être considéré pour lui-même.  $\Gamma_{\alpha\beta}^{(2,1)(1)}$  est zéro par causalité, et à l'ordre d'une boucle  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2,1)(1)}$  est nul. Il nous reste donc à considérer l'équation (6.10) et sa décomposition (6.11), les graphes étant affectés d'un facteur de symétrie égal à 2. Nous avons précédemment justifié qu'à cet ordre les facteurs  $Z$ ,  $\tilde{Z}$  et  $Z_\omega$  devaient être pris égaux à 1,  $\theta$  devait être pris égal à 0, et  $Z_r$  et  $\delta\omega_0$  devaient s'écrire :  $Z_r = 1 + \mathcal{O}(g)$  et  $\delta\omega_0 = \mathcal{O}(g)$ . En tenant compte de toutes ces informations, nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= 2r \mu^\varepsilon (4\pi)^{-\varepsilon/2} [G_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\sigma} + G_{\beta\sigma}\delta_{\alpha\gamma} + G_{\beta\alpha}\delta_{\gamma\sigma}] \times \\ &\times \int_{\mathbf{q}} \int_0^\infty dt (\chi(\mathbf{q}, t) C(\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}, -t))_{\gamma\sigma} \end{aligned} \quad (6.25)$$

L'intégration sur le temps mène à :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{q}} \int_0^\infty dt (\chi(\mathbf{q}, t) C(\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}, -t))_{11} &= \frac{1}{2} \times J + c.c. \\ &= \frac{D}{c^2} \frac{1}{(4\pi)^2 (4\pi)^{-\varepsilon/2}} \frac{1}{\varepsilon} (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) \\ \int_{\mathbf{q}} \int_0^\infty dt (\chi(\mathbf{q}, t) C(\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}, -t))_{21} &= -\frac{i}{2} \times J + c.c. \\ &= \frac{0}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (6.26)$$

et l'équation (6.10) nous donne les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} Z_r &= 1 + 8D \frac{\bar{\alpha}}{\varepsilon} + \mathcal{O}(g^2) \\ \delta\omega_0 &= -8rD \frac{\bar{\alpha}_a}{\varepsilon} + \mathcal{O}(g^2) \end{aligned} \quad (6.27)$$

### 6.2.3 Renormalisation du propagateur

Considérons maintenant les vertex propres qui ne sont pas renormalisés à l'ordre d'une boucle. Le premier que nous considérons est  $\Gamma^{(2,0)}$ . A l'ordre de deux boucles, et dans le cadre de la théorie  $\phi^4$  statique, nous trouvons l'unique graphe suivant :

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \quad (6.28)$$

qui a pour facteur de symétrie :  $2 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 = 192$ . Dans la théorie dynamique, il se décompose en :

$$\begin{aligned} (1) = & \text{---} \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} & (2) = & \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \\ (3) = & \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} & (4) = & \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---} \end{aligned} \quad (6.29)$$

Les facteurs de symétrie de cette décomposition sont respectivement :

$$\begin{aligned} (1) & \rightarrow 2 \times 3 \times 2 = 12 \\ (2) & \rightarrow 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 72 \\ (3) & \rightarrow 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36 \\ (4) & \rightarrow 2 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 72 \end{aligned} \quad (6.30)$$

Pour les mêmes raisons que celles qui ont été exposées dans le paragraphe 5.1.2 dans le cas de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2 \tilde{\beta}_3 \tilde{\beta}_4}^{(4)(1)}$ , nous ne devons considérer pour le calcul de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2,0)(2)}$  que la moitié des graphes de la classe (2). Nous obtenons, pour les sous-classes (a) à (g) des décompositions (6.13) et (6.15), les facteurs de symétrie suivants :

$$\begin{aligned} (a) & \rightarrow 2 \times 2 = 4 \\ (b) & \rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ (c) & \rightarrow 2 \times 2 = 4 \\ \text{sous-classes (d) à (g)} & \rightarrow 2 \times 2 \times 2 = 8 \end{aligned} \quad (6.31)$$



en fonction d'intégrales "élémentaires" les plus simples possibles. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \times \text{Diagram 1} &= \mu'^{2\varepsilon} (4\pi)^{-\varepsilon} (g^2 + g_a^2) [2I_a + 6I_b] \delta_{\alpha\beta} \\
 \frac{1}{2} \times \text{Diagram 2} &= 2\mu'^{2\varepsilon} (4\pi)^{-\varepsilon} [g^2(4J_a + 7J_c + J_e) + \\
 &\quad + g_a^2(4J_a - 7J_3c - J_e) + 2gg_a(7J_d - J_f)] \\
 \frac{1}{2} \times \text{Diagram 3} &= 2\mu'^{2\varepsilon} (4\pi)^{-\varepsilon} [g^2(-4J_b - 7J_d + J_f) + \\
 &\quad + g_a^2(-4J_b + 7J_d - J_f) + 2gg_a(7J_c + J_e)]
 \end{aligned} \tag{6.33}$$

où :

$$\begin{aligned}
 I_{d,\epsilon'\epsilon''}(c, c_a, \mathbf{k}) &= \frac{D^3}{c^4} I_{d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a, \mathbf{k}) \\
 &= \int_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \frac{D^3}{c\mathbf{q}^2 c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 c(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 [(c + ic_a)\mathbf{q}^2 + (c + i\epsilon'c_a)(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + (c + i\epsilon''c_a)(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2]} \\
 J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c, c_a, \mathbf{k}, \omega_k) &= \frac{D^2}{c^3} J_{d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a, \mathbf{k}, i\omega_k) \\
 &= \int_{\mathbf{p}, \mathbf{q}} \frac{D^2}{c\mathbf{q}^2 c(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 [(c + ic_a)\mathbf{q}^2 + (c + i\epsilon'c_a)(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + (c + i\epsilon''c_a)(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + i\omega_k]}
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

et

$$\begin{aligned}
 I_a &= \frac{1}{2}(I_{d,\epsilon'\epsilon''}(c_a) + I_{d,\epsilon'\epsilon''}(-c_a)) \quad \epsilon' = +1 \quad \epsilon'' = -1 \\
 I_b &= \frac{1}{2}(I_{d,\epsilon'\epsilon''}(c_a) + I_{d,\epsilon'\epsilon''}(-c_a)) \quad \epsilon' = -1 \quad \epsilon'' = +1 \\
 J_a &= \frac{1}{2}(J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c_a) + J_{d,\epsilon'\epsilon''}(-c_a)) \quad \epsilon' = +1 \quad \epsilon'' = -1 \\
 J_b &= \frac{i}{2}(J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c_a) - J_{d,\epsilon'\epsilon''}(-c_a)) \quad \epsilon' = +1 \quad \epsilon'' = -1 \\
 J_c &= \frac{1}{2}(J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c_a) + J_{d,\epsilon'\epsilon''}(-c_a)) \quad \epsilon' = -1 \quad \epsilon'' = +1 \\
 J_d &= \frac{i}{2}(J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c_a) - J_{d,\epsilon'\epsilon''}(-c_a)) \quad \epsilon' = -1 \quad \epsilon'' = +1 \\
 J_e &= \frac{1}{2}(J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c_a) + J_{d,\epsilon'\epsilon''}(-c_a)) \quad \epsilon' = -1 \quad \epsilon'' = -1 \\
 J_f &= \frac{i}{2}(J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c_a) - J_{d,\epsilon'\epsilon''}(-c_a)) \quad \epsilon' = -1 \quad \epsilon'' = -1
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

Les dépendances en  $c$ ,  $\mathbf{k}$  et éventuellement  $\omega_k$  sont sous-entendues. Il faut noter que l'intégrale  $J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c, c_a, \mathbf{k}, \omega_k)$  est en fait une fonction de  $c$ ,  $c_a$ ,  $c\mathbf{k}^2$  et  $i\omega_k$ . Comme nous l'avons dit, nous n'avons besoin que du terme constant de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2,0)(2)}$  et des termes linéaires en  $i\omega$  et  $c\mathbf{k}^2$  de  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,0)(2)}$ . Mais nous savons également que nous devons garder les dépendances en  $\mathbf{k}$  avant d'effectuer le développement en  $\epsilon$ , et ne prendre la limite  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$  qu'après. Nous avons donc besoin de l'expression de l'intégrale  $I_{d,\epsilon'\epsilon''}(c, c_a, \mathbf{k})$  et des dérivées par rapport à  $i\omega_k$  et  $c\mathbf{k}^2$  de  $J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c, c_a, \mathbf{k}, \omega_k)$ . Le calcul mène aux expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_{d,\epsilon'\epsilon''}(c, c_a, \mathbf{k}) &= \frac{D^3}{c^4} \frac{k^{2(d-4)}}{(4\pi)^d} \Gamma(4-d) \times H_{d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a) \\
 &= \frac{D^3}{c^4} \frac{1}{(4\pi)^4 (4\pi)^{-\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} H_{d=4,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a) (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\
 \frac{\partial J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c, c_a, \mathbf{k}, \omega_k)}{\partial c\mathbf{k}^2} &= -\frac{D^2}{c^4} \frac{6-d}{2} \frac{k^{2(d-4)}}{(4\pi)^d} \frac{\Gamma(4-d)\Gamma\left(\frac{6-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{8-d}{2}\right)} \times K_{1,d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a) \\
 &= -\frac{D^2}{c^4} \frac{1}{(4\pi)^4 (4\pi)^{-\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} \times K_{1,d=4,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a) (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\
 \frac{\partial J_{d,\epsilon'\epsilon''}(c, c_a, \mathbf{k}, \omega_k)}{\partial i\omega_k} &= -\frac{D^2}{c^3} \frac{6-d}{2} \frac{k^{2(d-4)}}{(4\pi)^d} \frac{\Gamma(4-d)\Gamma\left(\frac{6-d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{8-d}{2}\right)} \times K_{2,d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a) \\
 &= -\frac{D^2}{c^3} \frac{1}{(4\pi)^4 (4\pi)^{-\epsilon}} \frac{1}{\epsilon} \times K_{2,d=4,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a) (1 + \mathcal{O}(\epsilon))
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

#### 6.2.4 Intégrales et calcul formel

Les quantités  $H_{d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$ ,  $K_{1,d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  et  $K_{2,d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  sont des intégrales de fractions rationnelles à plusieurs variables dépendant du paramètre  $\bar{c}_a$ , et qu'il nous suffit de calculer en dimension  $d = 4$ .  $K_{1,d=4,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  et  $K_{2,d=4,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  sont des intégrales doubles, et  $H_{d=4,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  est une intégrale triple. Leur calcul représente un travail extrêmement copieux si il est effectué à la main, et nous avons donc choisi d'utiliser le logiciel Mathematica. Mais le logiciel mène à un résultat totalement erroné si on ne prend pas de précautions. En effet, les fractions rationnelles que nous devons intégrer sont des fonctions du paramètre  $\bar{c}_a$ , qui apparaît toujours dans la combinaison  $i\bar{c}_a$ . Les primitives de ces fractions rationnelles à valeur complexes font intervenir des combinaisons de la fonction logarithme, dont on sait qu'elle est multivaluée sur le plan complexe. Le choix d'une coupure contenant le pôle du logarithme (zéro) est nécessaire pour donner un sens à la quantité  $\ln z$ ,  $z \in \mathbf{C}$ . Les intégrations ne donnent alors un résultat correct que si le chemin d'intégration dans le plan complexe ne traverse jamais la coupure. Il nous faut donc, à chaque étape de l'intégration formelle, changer les écritures des primitives fournies par le logiciel, de façon à bouger la coupure, et pour que le chemin associé à l'intégration suivante ne la traverse jamais. Ce principe étant compris, nous réalisons qu'il nous faut a priori adapter la façon dont on réécrit les primitives (c'est à dire dont on change la coupure), à chaque valeur du paramètre  $\bar{c}_a$ . En effet, en fonction de sa valeur, les chemins

d'intégration seront différents. De façon à connaître la dépendance en  $\bar{c}_a$ , il nous faut effectuer le travail une infinité de fois. Le problème semble inextricable. La difficulté est levée en utilisant le fait que l'on sait *a priori* que le résultat de ces intégrales est une fonction analytique dans le paramètre  $\bar{c}_a$ . Le choix des redéfinitions des primitives, directement lié à la rotation de la coupure du logarithme que l'on effectue, peut être déterminé de manière univoque lorsque  $\bar{c}_a$  évolue dans un voisinage suffisamment restreint de 0. Nous obtenons alors une expression, calculée pour  $\bar{c}_a$  infiniment proche de 0, et dont nous savons que l'unique prolongement analytique à toute la droite réelle nous donne la fonction de  $\bar{c}_a$  cherchée.

Pour l'écriture des résultats, la convention choisie pour le positionnement de la coupure du logarithme complexe est le demi-axe réel négatif. Nous constatons avec les résultats ci-dessous que nous savons donner une expression valable pour tout  $\bar{c}_a$  dans le cas des intégrales  $K_{1,d=4,e'e''}(\bar{c}_a)$  et  $K_{2,d=4,e'e''}(\bar{c}_a)$ . En revanche,  $H_{d=4,e'e''}(\bar{c}_a)$  ne pourra être donnée que par une équation implicite. Le résultat de ces intégrales s'écrit :

$$\begin{aligned}
 I_1(\bar{c}_a) &= K_{1,d=4,+1+1}(\bar{c}_a) = \frac{1}{(1+i\bar{c}_a)} \times \frac{1}{6} \\
 I_2(\bar{c}_a) &= K_{1,d=4,-1-1}(\bar{c}_a) = \frac{2+i\bar{c}_a}{4(3+i\bar{c}_a)} \\
 I_3(\bar{c}_a) &= K_{1,d=4,-1+1}(\bar{c}_a) = I_2(-\bar{c}_a) \\
 I_4(\bar{c}_a) &= K_{1,d=4,+1-1}(\bar{c}_a) = \frac{1-i\bar{c}_a}{6-2i\bar{c}_a} \\
 I_5(\bar{c}_a) &= K_{2,d=4,+1+1}(\bar{c}_a) = \frac{1}{(1+i\bar{c}_a)^2} \log \left[ \frac{4}{3} \right] \\
 I_6(\bar{c}_a) &= K_{2,d=4,-1-1}(\bar{c}_a) = \frac{1}{(1-i\bar{c}_a)^2} \log \left[ \frac{4}{3+i\bar{c}_a} \right] \\
 I_7(\bar{c}_a) &= I_6(-\bar{c}_a) = K_{2,d=4,-1+1}(\bar{c}_a) \\
 I_8(\bar{c}_a) &= K_{2,d=4,+1-1}(\bar{c}_a) = \frac{1}{(1-i\bar{c}_a)^2} \log \left[ \frac{4}{(3-i\bar{c}_a)(1+i\bar{c}_a)} \right]
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

accompagné de l'équation implicite suivante :

$$\begin{aligned}
 I_9(\bar{c}_a) &= H_{d=4,+1-1}(\bar{c}_a) = H_{d=4,-1+1}(\bar{c}_a) \\
 &= \text{l'unique prolongement analytique de la fonction} \\
 &\quad \text{définie dans un voisinage de } \bar{c}_a = 0 \text{ par} \\
 &\quad \text{l'expression } I_9 \text{ donnée dans l'annexe E.}
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

### 6.2.5 Expression des facteurs $Z$

Nous pouvons finalement écrire le système suivant, dont la résolution mène à l'expression des facteurs  $Z$  de la théorie à l'ordre de deux boucles en théorie



des perturbations :

$$\begin{aligned}
 Z_\omega \tilde{Z} &= 1 - 8D^2 \frac{1}{\varepsilon} (\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}_a^2) \operatorname{Re}[I_9] \\
 Z_\omega^2 \sqrt{Z \tilde{Z}} \cos \theta &= 1 - 8D^2 \frac{1}{\varepsilon} \{ \bar{\alpha}^2 \operatorname{Re}[I_8 + 2I_6] + \bar{\alpha}_a^2 \operatorname{Re}[I_8 - 2I_6] + 2\bar{\alpha} \bar{\alpha}_a \operatorname{Im}[2I_6] \} \\
 Z_\omega \sqrt{Z \tilde{Z}} (\cos \theta - \bar{c}_a Z_{c_a} \sin \theta) &= 1 - 8D^2 \frac{1}{\varepsilon} \{ \bar{\alpha}^2 \operatorname{Re}[I_4 + 2I_2] + \bar{\alpha}_a^2 \operatorname{Re}[I_4 - 2I_2] + 2\bar{\alpha} \bar{\alpha}_a \operatorname{Im}[2I_2] \} \\
 Z_\omega^2 \sqrt{Z \tilde{Z}} \sin \theta &= -8D^2 \frac{1}{\varepsilon} \{ \bar{\alpha}^2 \operatorname{Im}[I_8 - 2I_6] + \bar{\alpha}_a^2 \operatorname{Im}[I_8 + 2I_6] + 2\bar{\alpha} \bar{\alpha}_a \operatorname{Re}[2I_6] \} \\
 Z_\omega \sqrt{Z \tilde{Z}} \left( Z_{c_a} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{\bar{c}_a} \right) &= 1 - 8D^2 \frac{1}{\varepsilon} \{ \bar{\alpha}^2 \operatorname{Im}[I_4 - 2I_2] + \bar{\alpha}_a^2 \operatorname{Im}[I_4 + 2I_2] + 2\bar{\alpha} \bar{\alpha}_a \operatorname{Re}[2I_2] \}
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

A cela, il faut ajouter les résultats donnant l'expression des facteurs  $Z$  qui sont renormalisés à l'ordre d'une boucle (6.23) et (6.27). Nous donnerons dans le chapitre 7 les expressions des fonctions intervenant dans les équations de groupe de renormalisation (4.72) et qui sont dérivées de ces résultats.



## Chapitre 7

# Comportement critique d'oscillateurs couplés en présence de bruit

Dans ce chapitre, nous donnons et discutons les principaux résultats de la thèse. Nous commençons par donner l'expression des fonctions qui interviennent dans les équations de groupe de renormalisation (4.72), et qui ont été obtenues à l'aide du calcul perturbatif du chapitre 6. Nous discutons ensuite comment revenir au référentiel originel de la théorie, en tenant compte de la renormalisation de la pulsation  $\omega_0$  et de la phase  $\theta$ . Nous donnons le diagramme de flot de la théorie, après avoir montré qu'il se réduit au graphe d'une fonction à un paramètre réel. Nous discutons la structure des points fixes et la classe d'universalité de la théorie. Nous insistons sur le fait que la limite vers la dimension 4 constitue une limite singulière. Puis nous caractérisons les expressions des fonctions de corrélation et de réponse dans le régime critique (section 7.3). Nous montrons que le paramètre  $c_a$  constitue, en un sens que nous précisons, un paramètre dangereusement non pertinent de la théorie. Au point fixe de la théorie, la relation Fluctuation-Dissipation, brisée hors équilibre, est dynamiquement restaurée dans le référentiel oscillant. Nous discutons ce point essentiel de notre résultat dans la section 7.4. Enfin, nous examinons comment accéder aux corrections aux lois d'échelle prévues par la théorie point fixe.

### 7.1 Expression et solution des équations de groupe de renormalisation

#### 7.1.1 Référentiel oscillant

Dans le cadre de notre technique, les équations de groupe de renormalisation consistent en les équations de Callan-Symanzik présentées dans le paragraphe 4.5.5, et dont la solution est donnée par l'équation (4.84). Le calcul du chapitre 6 nous permet de donner les expressions des fonctions qui interviennent dans ces équations au premier ordre non trivial dans un développement en puissances des constantes de couplages  $g$  et  $g_a$ . Nous utilisons les expressions des

facteurs  $Z$  de la théorie données dans le paragraphe 6.2.5, accompagnées du résultat du calcul des intégrales (6.37) et (6.38), et nous calculons les fonctions du groupe de renormalisation à l'aide de leurs expressions (4.77) et (4.79) dérivées au chapitre 4. Nous exprimons ces fonctions en termes des paramètres réduits  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\alpha}_a$  et  $\bar{c}_a$  définis par l'équation (6.24). Nous obtenons les résultats suivants : les fonctions  $\beta$  et  $\beta_a$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}\beta(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_a, \bar{c}_a, \varepsilon) &= (4\pi)^2 c^2 \left\{ -\varepsilon \bar{\alpha} - 4D \left[ \frac{\bar{\alpha}_a^2 - \bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha}\bar{\alpha}_a\bar{c}_a}{1 + \bar{c}_a^2} - 4\bar{\alpha}^2 \right] \right\} \\ \beta_a(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_a, \bar{c}_a, \varepsilon) &= (4\pi)^2 c^2 \left\{ -\varepsilon \bar{\alpha}_a - 4D \left[ \frac{\bar{c}_a}{1 + \bar{c}_a^2} (\bar{\alpha}^2 - \bar{\alpha}_a^2 + 2\bar{\alpha}\bar{\alpha}_a\bar{c}_a) - 6\bar{\alpha}\bar{\alpha}_a \right] \right\}\end{aligned}\quad (7.1)$$

où nous négligeons des termes d'ordre 3 ou plus en  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\alpha}_a$ . La fonction  $\gamma_r$  est donnée par :

$$\gamma_r = -8D\bar{\alpha} + \mathcal{O}(\bar{\alpha}^2) \quad (7.2)$$

Les expressions de la fonction  $\rho_{c_a}$ , ainsi que les expressions des fonctions  $\gamma$ ,  $\gamma_\omega$  et  $\tilde{\gamma}$  sont lourdes et leur calcul final a été effectué à l'aide du logiciel Mathematica. Nous donnons les expressions des fonctions  $\gamma$  et  $\rho_{c_a}$  dans l'annexe E. Les fonctions  $\gamma_\omega$  et  $\tilde{\gamma}$  ont des expressions similaires à celle de  $\gamma$ . Finalement, les fonctions de corrélation de la théorie dans le référentiel oscillant sont données par la solution des équations de Callan-Symanzik (4.84) et l'évolution (4.85).

### 7.1.2 Théorie physique

Rappelons que, de façons à obtenir le point fixe d'une transition oscillante, nous avons éliminé le paramètre  $\omega_0$  des équations de groupe de renormalisation en plaçant la théorie dans un référentiel oscillant à une fréquence et possédant un décalage de phase fonction de l'échelle à laquelle on considère le système (voir section 4.3). La théorie renormalisée ainsi définie est écrite en termes des champs dynamiques  $\phi_\alpha$  et  $\tilde{\phi}_\alpha$ , reliés aux champs  $\psi_\alpha$  et  $\tilde{\psi}_\alpha$  par les équations (4.69), et ses fonctions de corrélation sont notées  $\Gamma[\phi]$  par opposition aux fonctions physiques, qui seront notées dans la suite  $\Gamma[\text{Phys}]$ . Ces fonctions physiques sont exprimées dans référentiel originel et correspondent aux fonctions de corrélation nues de la théorie. Entre les fonctions nues et renormalisées de la théorie associée au champ  $\phi$ , défini au paragraphe 4.5.4, il n'y a qu'un facteur constant donné par les équations (4.71). Ainsi les fonctions nues associées à la théorie pour le champ  $\phi$  sont elles également données par la solution des équations de Callan-Symanzik (4.84), à un facteur multiplicatif près constant<sup>1</sup>. En revanche, pour revenir au référentiel originel, la situation est très différente. En effet, la théorie associée au champ  $\phi$  a été placée dans un référentiel oscillant à une fréquence et affecté d'un décalage de phase dépendant de l'échelle, ce que les équations (4.84) ne prennent pas en compte (voir paragraphes 4.3.1 et 4.5.4). Il nous faut donc corriger ces équations d'une transformation de référentiel dépendant de l'échelle

<sup>1</sup>Car le membre de gauche de l'équation (4.84) ne dépend pas du facteur de dilatation d'échelle  $s$ .

qui apparaît dans le membre de droite de (4.84). Cette transformation est la transformation associée à la rotation d'angle  $\omega_0(s)t(s)$  sur les deux champs dynamiques de la théorie  $\psi_\alpha$  et  $\tilde{\psi}_\alpha$ , ajoutée de la rotation d'angle  $\theta(s)$  sur le champ auxiliaire  $\tilde{\psi}_\alpha$ <sup>2</sup>.  $t(s)$  représente la variable temporelle mesurée dans les unités de temps renormalisées ; nous avons :  $t(s) = Z_\omega(s)t$ . La pulsation effective  $\omega_0(s)$  et la phase effective  $\theta(s)$  sont données par l'intégration d'équations d'évolution semblables à celles régissant l'évolution des autres paramètres de la théorie, mais qui se découplent des équations de groupe de renormalisation. Pour les écrire, nous introduisons deux nouvelles fonctions :

$$\begin{aligned} r \gamma_{\omega_0}(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{d\delta\omega_0}{d \ln \mu'} \\ \gamma_\theta(g, g_a, c_a, \varepsilon) &= \frac{d\theta}{d \ln \mu'} \end{aligned} \quad (7.3)$$

où  $\theta$  et  $\delta\omega_0$  sont les contre-termes introduits en (4.62) et (4.63). Nous remarquons que, structurellement, le contre-terme  $\delta\omega_0$  est proportionnel à  $r$  et que la fonction  $\gamma_{\omega_0}$  ainsi définie ne dépend pas de  $r$ . La dérivation des équations d'évolution pour  $\delta\omega_0(s)$  et  $\theta(s)$  se fait comme pour les autres paramètres (voir équation (4.85)). En particulier, les fonctions introduites ci-dessus ne dépendent pas explicitement de  $\varepsilon$ , et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d \delta\omega_0}{d \ln s} &= r(s) \gamma_{\omega_0}(\bar{\alpha}(s), \bar{\alpha}_a(s), \bar{c}_a(s)) \\ \frac{d\theta}{d \ln s} &= \gamma_\theta(\bar{\alpha}(s), \bar{\alpha}_a(s), \bar{c}_a(s)) \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ces équations sont découplées des équations de groupe de renormalisation, et leur résolution consiste juste en un calcul de primitive. Pour revenir à la théorie liée aux champs  $\psi_\alpha$  et  $\tilde{\psi}_\alpha$ , les conditions initiales  $\delta\omega_0(s=1)$  et  $\theta(s=1)$  peuvent être choisies de manière arbitraire. Elles n'entreront en effet en compte que par l'intermédiaire de paramètres effectifs de la théorie, qui constituent les observables physiques, et dont l'expression en fonction des quantités mathématiques de la théorie importe peu (voir paragraphe 7.3.3).

De façon à obtenir les expressions finales des fonctions liées à la théorie physique et définies par (2.7), il nous faut de plus rajouter les transformations effectuées avant renormalisation. Nous avons en effet au départ éliminé la fréquence  $\omega_0^{(0)}$  qui se trouvait dans le problème. En tenant compte de la renormalisation du temps, la fréquence effective du système à l'échelle  $s$  est donnée par :

$$\omega_0(s) = Z_\omega(s)^{-1} \omega_0^{(0)} + \delta\omega_0(s) \quad (7.5)$$

D'autre part, il nous faut tenir compte de la rotation d'angle  $\theta$  effectuée dans la définition des champs de l'équation dynamique, et donnée par (2.2). Dans le contexte du formalisme de Callan-Symanzik que nous utilisons, nous noterons la phase de cette rotation initiale  $\theta^{(0)}$ . Pour en tenir compte, il nous faut changer la condition initiale donnant l'expression de la phase  $\theta(s)$  en ajoutant  $\theta^{(0)}$ .

<sup>2</sup> Il s'agit en fait de la représentation de cette transformation sur les tenseurs  $\hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}$ .

Finalement, les fonctions de corrélation de la théorie qui nous intéressent sont données par :

$$\begin{aligned}
 & \widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\text{Phys}] (\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, c_a, g, g_a, r, \omega_0, \theta, \mu') = \\
 & s^{d+2-\tilde{N}(\frac{d+2}{2})-N(\frac{d-2}{2})} \exp \left\{ - \int_0^{\ln s} \left[ (\tilde{N} + N - 1)\gamma_\omega + \frac{\tilde{N}}{2}\tilde{\gamma} + \frac{N}{2}\gamma \right] d \ln s' \right\} \times \\
 & \times \text{Repr. Rot.} \left\{ \begin{array}{l} \phi_\alpha : \Omega_{\alpha\beta}(-\omega_0(s)t(s)) \\ \tilde{\phi}_\alpha : \Omega_{\alpha\beta}(-\theta(s) - \omega_0(s)t(s)) \end{array} \right\} \times \\
 & \times \widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi] \left( \frac{\mathbf{q}_{i(j)}}{s}, \frac{\omega_{i(j)}(s)}{s^2}; c, c_a(s), g(s), g_a(s), \frac{r(s)}{s^2}, \mu' \right) \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

Dans cette équation, “Repr. Rot.” désigne la représentation de l’opérateur de rotation  $\Omega_{\alpha\beta}$  sur les fonctions  $\widehat{\Gamma}$ , le champ  $\phi_\alpha$  étant tourné d’un angle  $(-\omega_0(s)t(s))$  et le champ  $\tilde{\phi}_\alpha$  d’un angle  $(-\theta(s) - \omega_0(s)t(s))$ . Les fonctions de corrélation et de réponse définies en (2.7) sont les éléments de matrice diagonaux des fonctions de corrélation à deux points données par la solution (7.6). En termes des variables réduites définies par (6.24), et à l’ordre du calcul perturbatif effectué dans le chapitre 6, nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\omega_0}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_a, \bar{c}_a) &= 8D\bar{\alpha}_a \\
 \gamma_\theta(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_a, \bar{c}_a) &= 16D^2 \left\{ \bar{\alpha}^2 \text{Im}[I_8 - 2I_6] + \bar{\alpha}_a^2 \text{Im}[I_8 + 2I_6] + 2\bar{\alpha}\bar{\alpha}_a \text{Re}[2I_6] \right\} \quad (7.7)
 \end{aligned}$$

où les expressions des intégrales  $I_6$  et  $I_8$  sont données par (6.37).

Remarquons le point important suivant : l’équation d’évolution pour le paramètre  $\omega_0$  est donnée dans ce contexte par :

$$\frac{d\delta\omega_0}{d \ln s} = 8Dr(s)\bar{\alpha}_a(s) \quad (7.8)$$

Cette équation est à comparer avec l’équation (5.25) obtenue dans le cadre de la méthode de Wilson. Ces deux équations semblent très différentes. En réalité, la méthode de Callan-Symanzik adaptée au groupe de renormalisation des oscillateurs couplés que nous avons utilisée effectue une perturbation autour du point fixe, et traite la paramètre  $\omega_0$  en perturbations. Par conséquent, de la même façon que pour le paramètre de masse dans un schéma minimal habituel, nous avons imposé à la valeur nue du paramètre  $\omega_0$  d’être dès le début à sa valeur critique. L’équation d’évolution que nous obtenons pour  $\omega_0(s)$  constitue donc une première correction autour de sa valeur point fixe. La différence essentielle avec le traitement du paramètre  $r$  est que cette valeur point fixe est quelconque, alors que celle de  $r$  est toujours zéro. Ayant tenu compte des facteurs de dilatation d’échelle (présents dans l’équation de Wilson, mais pas dans l’équation de Callan-Symanzik), et du fait que ici  $(\ln s)$  joue le rôle réservé à  $(-l)$  dans la méthode de Wilson, nous constatons que l’équation (7.8) est exactement le premier ordre en perturbations en puissances du paramètre de masse de l’équation (5.25). Ceci assure la cohérence de notre démarche.

## 7.2 Diagramme de flot, points fixes et classe d'universalité

### 7.2.1 Diagramme de flot

Le diagramme de flot constitue pour notre théorie un diagramme en trois dimensions, associé aux évolutions des paramètres  $g$ ,  $g_a$  et  $c_a$ , données par les équations (4.85). Par conséquent, et comme nous l'avons déjà remarqué, le calcul des points fixes est donné par le système (4.86) et fait intervenir les trois fonctions  $\beta$ ,  $\beta_a$  et  $\rho_{c_a}$ . Deux des équations qui constituent le système (4.86) sont exactement semblables à celles qui définissaient le point fixe à l'ordre d'une boucle dans le cadre de la technique de Wilson lorsque  $r$  se trouvait à sa valeur point fixe  $r^*$  (Eq. (5.24)). En effet, dans les équations donnant l'évolution des paramètres  $u$  et  $u_a$ , la présence du paramètre  $r$  ne donnait que des corrections d'ordre supérieur. Nous avons vu qu'alors un point fixe était trouvé pour toute valeur du paramètre  $c_a$ . D'autre part, la fonction  $\rho_{c_a}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_a, \bar{c}_a)$  est homogène de degré deux en  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\alpha}_a$ . Il est alors cohérent d'utiliser les valeurs  $\bar{\alpha}^*$  et  $\bar{\alpha}_a^*$  au point fixe au premier ordre en  $\varepsilon$ , qui sont des fonctions du paramètre  $\bar{c}_a$ , et de les reporter dans la fonction  $\rho_{c_a}$ , qui n'est alors plus fonction que d'une seule variable :  $\bar{c}_a$ . En termes des variables réduites nous avons :

$$\bar{\alpha}^*(\bar{c}_a) = \frac{\varepsilon}{20D} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \bar{\alpha}_a^*(\bar{c}_a) = \bar{c}_a \frac{\varepsilon}{20D} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7.9)$$

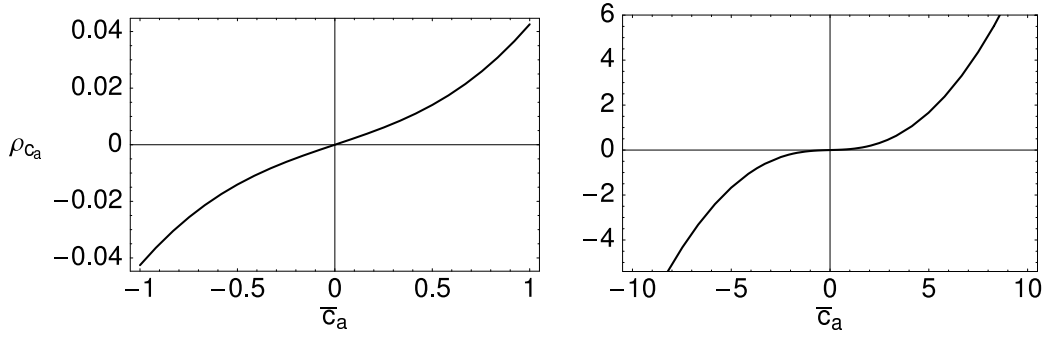
Pour ce qui est de la recherche des points fixes, nous pouvons donc restreindre la description du diagramme de flot en termes de l'unique fonction d'une seule variable réelle :  $\rho_{c_a}(\bar{\alpha}^*(\bar{c}_a), \bar{\alpha}_a^*(\bar{c}_a), \bar{c}_a)$ . L'équation donnant les points fixes à l'ordre de deux boucles est donc :

$$\rho_{c_a}(\bar{\alpha}^*(\bar{c}_a^*), \bar{\alpha}_a^*(\bar{c}_a^*), \bar{c}_a^*) = 0 \quad (7.10)$$

les deux autres équations étant vérifiées dès lors que l'on impose les égalités (7.9).  $\rho_{c_a}(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_a, \bar{c}_a)$  étant homogène de degré deux en  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\alpha}_a$ , et les valeurs de ces deux paramètres étant toutes deux proportionnelles à  $\varepsilon$  au point fixe, nous pouvons simplifier l'équation (7.10) par  $\varepsilon^2$ . Nous obtenons alors une équation indépendante de  $\varepsilon$ , et la valeur du paramètre  $\bar{c}_a$  au point fixe est une constante indépendante de la dimension spatiale. Le calcul à l'ordre de deux boucles que nous avons effectué nous donne, pour la fonction  $\rho_{c_a}(\bar{\alpha}^*(\bar{c}_a), \bar{\alpha}_a^*(\bar{c}_a), \bar{c}_a)$ , le graphe donné figure 7.1.

### 7.2.2 Classe d'universalité et exposants critiques

La seule valeur du paramètre  $\bar{c}_a$  satisfaisant l'équation (7.10) est le point fixe  $\bar{c}_a^* = 0$ . Nous n'avons donc pour seul point fixe que celui du modèle  $O(2)$  dynamique. Comme nous l'avons expliqué, nous savions que ce point de l'espace des paramètres était point fixe de notre théorie. Les questions que nous nous posions concernaient le nombre total de points fixes, leurs valeurs, leur stabilité et les exposants critiques associés. Nous sommes en mesure d'affirmer qu'à



**FIG. 7.1:** Graphe de la fonction  $\rho_{c_a}(\bar{\alpha}_a^*(\bar{c}_a), \bar{\alpha}_a^*(\bar{c}_a), \bar{c}_a)$  obtenue à l'ordre de deux boucles en théorie des perturbations, après simplification par  $\varepsilon^2$ , et pour deux intervalles différents de variation du paramètre  $\bar{c}_a$ . Le seul point fixe correspond à une valeur zéro du paramètre  $\bar{c}_a$ , et il est infrarouge stable.

l'ordre de deux boucles, la transition de phase oscillante homogène d'un système de dimension inférieure à 4 et infiniment proche de 4, homogène, isotrope et invariant par translations spatiales et temporelles, possède, dans le référentiel oscillant à la fréquence effective des oscillations spontanées, le même point fixe que la transition associée au modèle  $O(2)$  dynamique, et donc en particulier les mêmes exposants critiques définissant les lois d'échelle dominantes. Les similarités et différences avec le modèle  $O(2)$ , ainsi que les conséquences de notre résultat sur les propriétés des oscillateurs critiques, seront analysées dans les sections suivantes.

Nous résumons ci-dessous les exposants critiques indépendants, associés aux comportements d'échelle (4.41), (4.42) et (4.43), et calculés à l'ordre de deux boucles à l'aide des formules (4.89) :

$$\begin{aligned} z &= 2 + \frac{\varepsilon^2}{50} \left( -1 + 6 \log \frac{4}{3} \right) \\ \eta &= \frac{\varepsilon^2}{50} \\ \tilde{\eta} &= \frac{\varepsilon^2}{50} \left( -1 + 12 \log \frac{4}{3} \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

A cela, il faut ajouter la valeur de l'exposant  $\nu$ , que nous connaissons déjà à l'ordre d'une boucle :

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{10} \quad (7.12)$$

Ces exposants sont les mêmes que ceux du modèle  $O(2)$  dynamique. En particulier, la relation (4.48) reliant les exposants  $z$ ,  $\eta$  et  $\tilde{\eta}$ , qui est imposée par le théorème Fluctuation-Dissipation et est donc valable à tout ordre en théorie des perturbations dans le cas du modèle  $O(2)$ , est satisfaite à l'ordre de deux boucles pour notre modèle. Ceci constitue un aspect surprenant de notre résultat, puisque le bilan détaillé est brisé dans le système, y compris dans le référentiel oscillant. Nous reviendrons en détails sur cet aspect important de notre résultat dans la section 7.4.



### 7.2.3 Phase et pulsation effectives et quantités universelles

Un autre aspect important de notre résultat est la suivant : les fonctions  $\gamma_{\omega_0}$  et  $\gamma_\theta$  sont toutes deux nulles au point fixe. Ainsi la fréquence et la phase du problème ne sont pas renormalisées au point fixes. Pour la théorie critique, qui se situe sur la surface critique mais diffère du point fixe, ces quantités sont renormalisées par un terme additif fini. Les valeurs de ces paramètres à la transition sont spécifiques de chaque système, et ne sont par conséquent pas universelles. En revanche, l'écart à leur valeur point fixe, dont l'évolution en fonction de l'échelle est donnée par les équations de groupe de renormalisation linéarisées, sont, elles, des quantités universelles. En particulier, nous verrons comment cette évolution influence l'expression des fonctions de corrélation et de réponse dans la région critique (voir section 7.3).

### 7.2.4 Limite singulière en dimension 4 et synchronisation

Un autre aspect essentiel de ce résultat est que la structure des points fixes du groupe de renormalisation est très différente en dimension d'espace supérieure et inférieure à 4. En effet, en dimension supérieure à 4 le point fixe gaussien est un point fixe stable du groupe de renormalisation, et c'est ce point fixe qui décrit la transition. Pour ce point fixe, la valeur du paramètre  $c_a$  peut être choisie *arbitrairement*. Ainsi, après avoir fixé les paramètres que nous avons le droit de fixer *a priori* dans la procédure de renormalisation<sup>3</sup>, il nous reste, en dimension supérieure à 4, une ligne de points fixes. En dimension d'espace inférieure à 4 en revanche, la valeur  $c_a = 0$  est la seule valeur point fixe qui soit acceptable. Ainsi, si l'on suit l'évolution d'un jeu de paramètre  $\Pi$ , qui dépend de la dilatation d'échelle  $s$  et du paramètre  $\varepsilon = 4 - d$ , nous avons la limite singulière suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s \rightarrow 0} \Pi \neq \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \Pi \quad (7.13)$$

En particulier, dans le cas d'une théorie critique, nous avons :

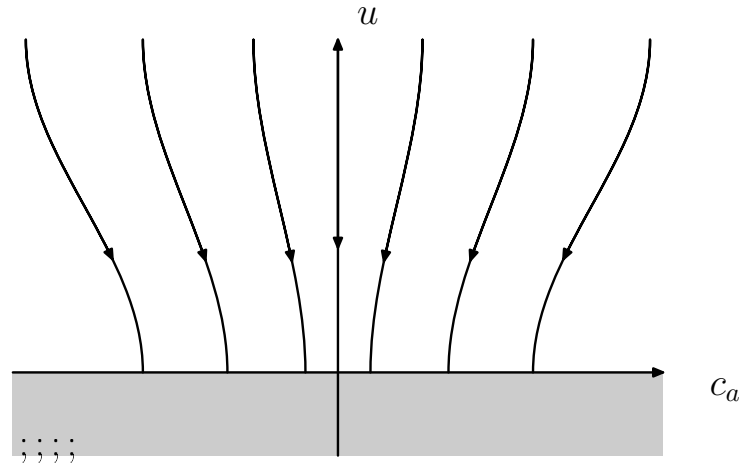
$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \lim_{s \rightarrow 0} (\bar{\alpha}(s), \bar{\alpha}_a(s), \bar{c}_a(s)) &= (0, 0, 0) \\ \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\bar{\alpha}(s), \bar{\alpha}_a(s), \bar{c}_a(s)) &= (0, 0, c_a^*) \end{aligned} \quad (7.14)$$

où, en choisissant bien les conditions initiales,  $c_a^*$  peut prendre n'importe quelle valeur. Ce fait est illustré sur les figures 7.2 et 7.3.

### 7.2.5 Synchronisation

Physiquement notre résultat a une signification importante. En absence de bruit, comme nous l'avons dit dans le chapitre 3 section 3.3, la dynamique est très riche du côté instable de la bifurcation. En particulier, en fonction de la valeur relative de certains paramètres, les solutions ondes planes de l'équation Ginzburg-Landau complexe peuvent devenir toutes instables, laissant alors place

<sup>3</sup>Voir le paragraphe 4.1.2.

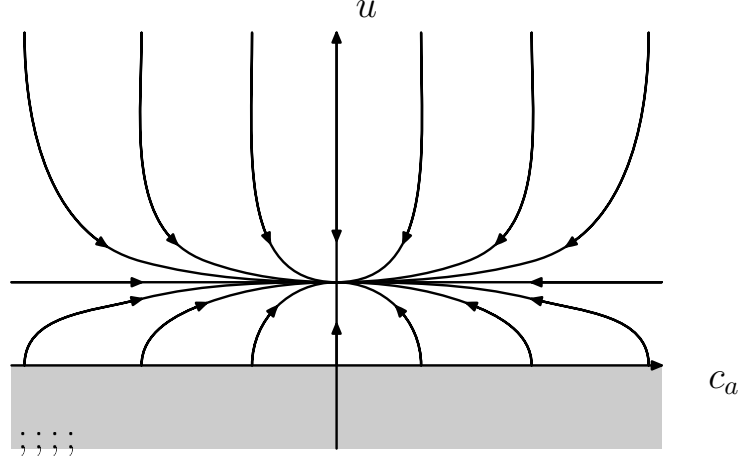


**FIG. 7.2:** Projection des lignes de flot dans le plan  $(u, c_a)$  en dimension d'espace supérieure à 4. Tout l'axe  $c_a$  est constitué de points fixes du groupe de renormalisation. Si l'on suit une ligne de flot, on tend vers un de ces points fixe pour lequel la valeur de  $c_a$  dépend des conditions initiales. La zone grisée indique une région de l'espace des paramètres qui n'est jamais explorée par renormalisation.

à une dynamique intrinsèquement chaotique [3]. Il est connu que la présence de bruit peut avoir un effet stabilisant pour certaines structures produites par la dynamique, même lorsque le chaos les détruit dans le cas déterministe [30, 31, 115]. Dans le cas des oscillateurs couplés que nous cherchons à décrire, il est également connu que le bruit peut avoir un effet de synchronisation des phases respectives des différents oscillateurs lorsque la dynamique déterministe est chaotique [112, 148, 42]. Le fait que nous ne trouvons comme point fixe stable que celui qui est associé au modèle  $O(2)$  dynamique peut être interprété comme une signature générique de l'effet structurant du bruit à la transition. En effet, comme nous l'avons d'ores et déjà remarqué dans la section 2.4, dans le cas où les paramètres  $c_a$  et  $u_a$  du modèle sont nuls, la dynamique dans le référentiel oscillant est exactement celle du modèle  $O(2)$ . Dans le référentiel originel, nous observons alors une synchronisation des oscillateurs qui, en particulier, ne produit pas de chaos. Nous avons bien trouvé, en approchant le point critique par le côté non oscillant de la transition, une transition de synchronisation homogène des oscillateurs, qui peut être vue comme une bifurcation de Hopf étendue. Toutefois, pour conclure sur la vraie nature de la transition en présence de bruit, il serait nécessaire d'analyser la structure du groupe de renormalisation du côté instable de la transition.

### 7.3 Fonctions de corrélation et de réponse dans le régime critique

Nous nous proposons dans cette section de donner une expression effective de la fonction de réponse linéaire de la théorie. La démarche que nous détaillons ici peut être reproduite exactement pour la fonction de corrélation. La phase



**FIG. 7.3:** Projection des lignes de flot dans le plan  $(u, c_a)$  en dimension d'espace inférieure à 4. Pour les grandes valeurs de  $u$ , il n'y a pas de différence avec le diagramme de la figure 7.3. Dans la région d'ordre  $\varepsilon$  en revanche, la situation est très différente. Le seul point fixe est le point fixe  $(u^* = \frac{\varepsilon}{20D} (4\pi^2 c^2), c_a = 0)$ . Toutes les lignes de flot y convergent.

effective  $\theta$  n'apparaissant que dans l'expression de la fonction de réponse, nous avons choisi de présenter l'étude de cette fonction, qui contient l'information la plus riche sur la théorie. Pour calculer la fonction de réponse linéaire dans le régime critique, nous utilisons le fait que la matrice des corrélateurs à deux points (2.25) est donnée par l'inverse de la matrice  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  (Eq. (2.36)). La démarche est la suivante : la solution des équations de groupe de renormalisation, présentée dans la section 7.1, nous permet de connecter ces fonctions à deux échelles différentes. En particulier, cela nous permet de connecter la théorie à une échelle donnée avec une échelle où les paramètres sont suffisamment loin de la surface critique pour qu'un développement perturbatif classique autour de la théorie champ moyen soit possible. Certaines grandeurs intervenant dans le résultat sont des constantes, qui dépendent des paramètres de la théorie et de l'échelle à laquelle on décide d'effectuer le développement perturbatif. Leur combinaison se retrouve dans le résultat final sous la forme d'un petit nombre de paramètres effectifs, qui sont des grandeurs expérimentalement mesurables. Le calcul présenté ci-dessous prédit la dépendance en  $\mathbf{q}$  et en  $\omega$  de la fonction de réponse. En principe, si nous connaissons les équations de groupe de renormalisation avec une précision arbitraire, et si nous effectuons le développement perturbatif à un ordre arbitraire, nous pouvons calculer avec une précision arbitraire la fonction cherchée. Dans la présentation qui suit, nous ne nous intéressons qu'à l'ordre dominant du comportement de la fonction près de la surface critique. En particulier, la solution des équations de groupe de renormalisation sera calculée à l'ordre linéaire autour du point fixe, ce qui en permet une intégration analytique. Nous commençons par dériver l'expression de la fonction de réponse de la théorie qui est placée dans le référentiel oscillant, puis précisons comment obtenir les observables physiques dans le référentiel originel. Nous précisons dans quels régime nos expressions sont valables.

### 7.3.1 Référentiel oscillant

Nous commençons par exprimer la solution des équations de groupe de renormalisation pour  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}[\phi]$ , qui est l'inverse de la fonction de réponse de la théorie renormalisée écrite dans le référentiel oscillant. Nous avons :

$$\widehat{\Gamma}^{(1,1)}[\phi](\mathbf{q}, \omega; c, c_a, g, g_a, t, \mu') = s^2 \exp \left\{ - \int_0^{\ln s} \left[ \gamma_\omega + \frac{1}{2}(\tilde{\gamma} + \gamma) \right] d \ln s' \right\} \cdot \widehat{\Gamma}^{(1,1)}[\phi] \left( \frac{\mathbf{q}}{s}, \frac{\omega(s)}{s^2}; c, c_a(s), g(s), g_a(s), \frac{r(s)}{s^2}, \mu' \right) \quad (7.15)$$

Nous utilisons le facteur d'échelle  $s$  vers ses petites valeurs pour nous placer en un point de l'espace des paramètres pour lequel  $r^* = r(s^*)/s^*$  est suffisamment grand pour que les expressions de la théorie champ moyen soient valables avec une bonne approximation. Entre  $s = 1$  et  $s = s^*$ , nous utilisons la solution des équations de groupe linéarisées autour du point fixe. Nous introduisons la longueur de corrélation  $\xi$  du système de manière analogue à ce que nous avons fait en champ moyen (paragraphe 3.3.2). Pour la partie diagonale de  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}$ , nous obtenons l'expression suivante :

$$\widehat{\Gamma}_{11}^{(1,1)}[\phi](q = |\mathbf{q}|, \omega) = \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^{z - \frac{1}{2}(\eta + \tilde{\eta})} \left[ -i\omega \left( \frac{\xi}{\xi_0} \right)^z + \frac{c}{\xi_0^2} [1 + (q\xi)^2] \right] \quad (7.16)$$

où  $\xi_0$  est une longueur effective apparaissant dans le problème. Cette expression est valable pour  $q\xi$  et  $\omega\xi^z$  très petits devant 1. Dans le régime des longueurs suffisamment petites par rapport à la longueur de corrélation  $\xi$  pour que les lois asymptotiques critiques prévues le point fixe soient valables, mais suffisamment grandes pour pouvoir garder une description effective en termes d'une théorie continue et oublier les corrections liées aux paramètres non-pertinents (voir la section 7.5), nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \widehat{\Gamma}_{11}^{(1,1)}[\phi](q, \omega = 0) &\simeq A_1 q^{z - \frac{1}{2}(\eta + \tilde{\eta})} \\ \widehat{\Gamma}_{11}^{(1,1)}[\phi](q = 0, \omega) &\simeq A_2 |\omega|^{1 - \frac{1}{2z}(\eta + \tilde{\eta})} \end{aligned} \quad (7.17)$$

En imposant la continuité en  $q = \xi^{-1}$  (resp.  $|\omega| = \xi^{-z}$ ), nous pouvons relier l'expression des amplitudes  $A_1$  et  $A_2$  aux paramètres effectifs de l'équation (7.16). Le point important est que  $A_1$  et  $A_2$  ne dépendent pas de la longueur de corrélation  $\xi$ .

La partie hors diagonale de  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}$  introduit une subtilité. En effet, dans les expressions champ moyen, le paramètre  $c_a$  se trouve en facteur de l'expression de cette fonction. Or les arguments précédents reposaient sur le fait que les paramètres non pertinents de la théorie n'intervenaient pas à l'ordre dominant dans les expressions des fonctions de corrélations dilatées d'un facteur d'échelle  $s$  pour les petites valeurs de  $s$ . Si un paramètre non-pertinent se trouve en facteur des fonctions de corrélation, il modifie les lois d'échelles. C'est le cas de  $c_a$ , qui constitue un paramètre appelé "dangereusement non-pertinent". La solution (7.15) pour la partie hors-diagonale de  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}$  est alors mieux représentée si l'on met  $c_a$  en facteur dans chacun des membres de l'équation. Ainsi, pour obtenir des expressions analogues à (7.16) et (7.17) pour la partie hors diagonale de  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}$ , il nous faut connaître la loi d'évolution  $c_a(s)$ .

### 7.3.2 Solution $c_a(s)$

Les équations d'évolution pour  $g$ ,  $g_a$  et  $c_a$  sont données par un système d'équations différentielles non linéaires couplées. Pour alléger les notations, nous notons  $\vec{g}$  et  $\vec{\beta}$  respectivement les vecteurs  $(g, g_a, c_a)$  et  $(\beta, \beta_a, \rho_{c_a})$ <sup>4</sup>. Au voisinage du point fixe, nous pouvons linéariser l'équation d'évolution de vecteur  $\vec{g}$  donnée par (4.85), et nous obtenons :

$$\frac{d(\vec{g} - \vec{g}^*)}{d \ln s} = \underline{\underline{\omega}} \cdot (\vec{g} - \vec{g}^*) \quad (7.18)$$

dont la solution s'écrit :

$$\vec{g}(s) - \vec{g}^* = \exp \{ \underline{\underline{\omega}} \ln s \} \cdot (\vec{g} - \vec{g}^*) \quad (7.19)$$

A l'ordre de deux boucles, la matrice  $\underline{\underline{\omega}}$  intervenant dans ces expressions est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \varepsilon/5 & -\frac{\varepsilon^2}{100\bar{D}} \\ \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \mathcal{O}(\varepsilon^2) & \frac{\varepsilon^2}{50} \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

avec  $\bar{D} = D / ((4\pi)^2 c)$ . Ces valeurs propres sont :

$$\omega_1 = \varepsilon \quad ; \quad \omega_2 = \frac{\varepsilon}{5} \quad ; \quad \omega_3 = \frac{\varepsilon^2}{50} \quad (7.21)$$

Ces valeurs, qui ne dépendent que des propriétés du point fixe, sont des valeurs universelles, et  $\omega_2$  et  $\omega_3$  sont des nouvelles valeurs qui n'existent pas dans le modèle  $O(2)$  dynamique. Nous retrouvons les deux valeurs propres non pertinentes  $\varepsilon$  et  $\varepsilon/5$  de la matrice des équations de groupe de renormalisation (5.28) qui avaient été dérivées dans le cadre de la méthode de Wilson. Les deux autres valeurs non nulles sont obtenues par la linéarisation de la fonction  $\rho_{c_a}(g, g_a, c_a)$  au voisinage du point fixe. Finalement nous obtenons, dans le régime linéaire, l'évolution suivante :

$$c_a(s) = s^{\omega_3} c_a \quad (7.22)$$

Ainsi, pour  $q\xi$  et  $\omega\xi^z$  petits devant 1, la partie hors diagonale de  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}$  est donnée par :

$$\widehat{\Gamma}_{12}^{(1,1)}[\phi](q, \omega) = - \left( \frac{\xi_0}{\xi} \right)^{z - \frac{1}{2}(\eta + \tilde{\eta}) + \omega_3} \frac{c_a(q\xi)^2}{\xi_0^2} \quad (7.23)$$

Nous remarquons que cette fonction ne dépend pas de  $\omega$ . En particulier, pour  $q = 0$ , elle est identiquement nulle. D'autre part, puisque la transformation (7.15) ne contient de rotation, cette propriété reste vraie à toute échelle. Dans le régime critique, nous avons donc la loi asymptotique suivante :

$$\widehat{\Gamma}_{12}^{(1,1)}[\phi](q, \omega = 0) = -B_1 q^{z - \frac{1}{2}(\eta + \tilde{\eta}) + \omega_3} \quad (7.24)$$

la dépendance en  $\omega$  pour  $q = 0$  étant identiquement nulle. Nous pouvons à nouveau, en imposant la continuité en  $q = \xi^{-1}$ , exprimer le pré-facteur  $B_1$  à l'aide des paramètres effectifs de l'équation (7.23).

<sup>4</sup>Nous gardons toutefois à l'esprit que  $c_a$  n'est pas une constante de couplage.

Finalement, nous sommes intéressés par le comportement de la fonction de réponse, qui est donnée par l'inverse de la matrice  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}$ . Les expressions précédentes dépendent de trois paramètres :  $c$ ,  $c_a$  et  $\xi_0$ . Ces paramètres sont liés aux paramètres de la théorie, qui sont des quantités abstraites, et dans une certaine mesure arbitraires. Il est plus intéressant d'écrire le résultat en fonctions de trois paramètres effectifs, que nous noterons  $\bar{\lambda}_{\text{eff}}$ ,  $\bar{c}_{\text{eff}}$  et  $\bar{\gamma}_{\text{eff}}$ , et qui sont directement liés aux observables physiques<sup>5</sup>. Ces paramètres peuvent être exprimés en fonction des précédents. Nous en donnons pour information les expressions dans l'annexe E. En fonction de ces paramètres effectifs, nous pouvons maintenant donner l'expression de la fonction de réponse que nous cherchons. Tout d'abord, dans le régime  $q\xi \ll 1$ ,  $\omega\xi^z \ll 1$ , nous avons :

$$\gamma_{\alpha\beta}[\phi](q, \omega) = \frac{\xi^{z-\frac{1}{2}(\eta+\tilde{\eta})}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2} \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{A}} & \bar{\mathcal{B}} \\ -\bar{\mathcal{B}} & \bar{\mathcal{A}} \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

où :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{A}} &= -i\bar{\lambda}_{\text{eff}}\omega\xi^z + \bar{c}_{\text{eff}} [1 + (q\xi)^2] \\ \bar{\mathcal{B}} &= \bar{\gamma}_{\text{eff}} (q\xi)^2 \xi^{-\omega_3} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Dans le régime critique, nous avons :

$$\gamma_{\alpha\beta}[\phi](q, \omega = 0) = \frac{1}{q^{z-\frac{1}{2}(\eta+\tilde{\eta})}} \frac{1}{4\bar{c}_{\text{eff}}^2 + (\bar{\gamma}_{\text{eff}})^2 q^{2\omega_3}} \begin{pmatrix} 2\bar{c}_{\text{eff}} & \bar{\gamma}_{\text{eff}} q^{\omega_3} \\ -\bar{\gamma}_{\text{eff}} q^{\omega_3} & 2\bar{c}_{\text{eff}} \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

et

$$\gamma_{\alpha\beta}[\phi](q = 0, \omega) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\left[ -i\bar{\lambda}_{\text{eff}} \frac{\omega}{|\omega|} + \bar{c}_{\text{eff}} \right] |\omega|^{1-\frac{1}{2z}(\eta+\tilde{\eta})}} \quad (7.28)$$

### 7.3.3 Phase et pulsation effectives

Pour déterminer la fonction de réponse de la théorie physique, il nous faut effectuer la totalité des transformations de renormalisation, en tenant compte des transformations de rotation définies par (7.6). Nous avons appris dans le chapitre 2 comment agissent ces transformations en termes des fonctions à deux points qui nous intéressent. Nous sommes intéressés par la dépendance en  $\omega$  près du mode critique  $\omega_0(s)$ . Dans ce cas, la transformation (2.46), écrite en termes des fonctions de réponse et du paramètre effectif  $\omega_0(s)$ , peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \chi_{11}(\mathbf{q}, \omega) &\propto \frac{1}{2} \left[ \gamma_{11} \left( \frac{\mathbf{q}}{s}; \frac{\omega(s) - \omega_0(s)}{s^2} \right) - i\gamma_{12} \left( \frac{\mathbf{q}}{s}; \frac{\omega(s) - \omega_0(s)}{s^2} \right) \right] \\ \chi_{12}(\mathbf{q}, \omega) &\propto \frac{1}{2} \left[ \gamma_{12} \left( \frac{\mathbf{q}}{s}; \frac{\omega(s) - \omega_0(s)}{s^2} \right) + i\gamma_{11} \left( \frac{\mathbf{q}}{s}; \frac{\omega(s) - \omega_0(s)}{s^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.29)$$

<sup>5</sup>Cette notation  $\bar{\phantom{x}}$  est choisie pour ne pas confondre ces paramètres avec les paramètres effectifs qui interviendront dans l'expression finale de la fonction de réponse.

Dans ces expressions, la matrice  $\gamma$  est calculée à l'aide des paramètres à l'échelle  $s$  contenus dans l'expression (7.15), et nous avons omis un facteur de proportionnalité dépendant de  $s$  égal à l'inverse de celui qui se trouve dans (7.15). Finalement, la fonction de réponse physique  $\chi$  est donnée par :

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) \simeq \frac{1}{\Lambda} [\cos \theta(s) \chi_{11}(\mathbf{q}, \omega) + \sin \theta(s) \chi_{12}(\mathbf{q}, \omega)] \quad (7.30)$$

Sur la surface critique, la valeur de la fonction  $\gamma_{\omega_0}$ , qui contient  $r(s)$  en facteur, est nulle. Par conséquent, pour la théorie critique, il n'y a pas de renormalisation de la pulsation effective des oscillations spontanées à la transition, et  $\omega_0(s)$  est juste donnée par  $Z_\omega(s)^{-1} \omega_0^{(0)}$ . D'autre part, au point fixe,  $\gamma_\theta$  est également nulle. La linéarisation de la dépendance  $\theta(s)$  et  $\omega_0(s)$  autour de leur valeur point fixe donne une évolution qui est mathématiquement équivalente aux évolutions des paramètres régissant les corrections aux lois d'échelle discutées dans la section 7.5. Toutefois, la signification est différente. En effet, dans le cas de la phase  $\theta(s)$  par exemple, le point fixe prévoit une phase indépendante de l'échelle. La linéarisation autour du point fixe donne donc le premier ordre non nul dans l'évolution de  $\theta(s)$ . Dans le cas des autres paramètres, en revanche, il s'agit seulement d'une correction à l'évolution prévue par le point fixe. La linéarisation de l'évolution de la phase  $\theta(s)$  autour de sa valeur point fixe (par ailleurs quelconque) est donnée dans l'annexe E.

Si l'on s'écarte de la région critique, l'évolution du paramètre  $\omega_0$  donne des corrections qui dépendent de la longueur de corrélation  $\xi$  du système. Il en est de même pour l'évolution de  $\theta$ . Ainsi, pour exprimer la fonction de réponse physique, l'expression (7.25) doit être affectée d'une transformation de rotation d'angle  $\theta(\xi)$  et de pulsation  $\omega_0(\xi)$ . En termes des unités relatives à la variable  $\omega$  qui apparaît dans l'équation (7.26), nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \theta_{\text{eff}} + \alpha_{\text{eff}} \xi^{-\omega_2} + \beta_{\text{eff}} \xi^{-\omega_3} \\ \omega_0(\xi) &= \omega_0^{\text{eff}} + \rho_{\text{eff}} \xi^{-1/\nu} + \sigma_{\text{eff}} \xi^{-2-\omega_2} + \delta_{\text{eff}} \xi^{-2} \end{aligned} \quad (7.31)$$

où  $\theta_{\text{eff}}$  et  $\omega_0^{\text{eff}}$  sont des quantités effectives, reliées aux conditions initiales choisies pour intégrer les équations (7.4). Comme nous l'avons alors justifié, seules ces grandeurs effectives constituent des observables physiques, et leurs expressions en fonctions des grandeurs mathématiques de la théorie ne sont pas importantes. A l'ordre auquel nous avons effectué les calculs, l'exposant critique  $z$  peut être pris égal à 2 dans l'expression  $\omega_0(\xi)$  car nous ne connaissons les exposants  $\nu$  et  $\omega_2$  qu'à l'ordre  $\varepsilon$ . Les paramètres  $\alpha_{\text{eff}}$ ,  $\beta_{\text{eff}}$ ,  $\rho_{\text{eff}}$ ,  $\sigma_{\text{eff}}$  et  $\delta_{\text{eff}}$  sont des paramètres effectifs dont nous donnons pour information les expressions dans l'annexe E. Finalement, dans la région  $q\xi \ll 1$ ,  $(\omega - \omega_0(\xi))\xi^z \ll 1$ , nous avons l'expression suivante pour la fonction de réponse physique complète :

$$\chi(q = |\mathbf{q}|, \omega) \simeq \frac{\xi^{z - \frac{1}{2}(\eta + \bar{\eta})}}{2} \left[ \frac{e^{+i\theta(\xi)}}{\mathcal{A} + i\mathcal{B}} \right] \quad (7.32)$$

où nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -i\Lambda_{\text{eff}} (\omega - \omega_0(\xi)) \xi^z + c_{\text{eff}} (1 + (q\xi)^2) \\ \mathcal{B} &= \gamma_{\text{eff}} (q\xi)^2 \xi^{-\omega_3} \end{aligned} \quad (7.33)$$

et où  $\omega_0(\xi)$  et  $\theta(\xi)$  sont donnés par (7.31). Les paramètres effectifs sont donnés par :

$$\Lambda_{\text{eff}} = \Lambda \bar{\lambda}_{\text{eff}} \quad ; \quad c_{\text{eff}} = \Lambda \bar{c}_{\text{eff}} \quad ; \quad \gamma_{\text{eff}} = \Lambda \bar{\gamma}_{\text{eff}} \quad (7.34)$$

Lorsque l'on se rapproche de la surface critique,  $\xi$  tend vers l'infini, et  $\omega_0(\xi)$  et  $\theta(\xi)$  tendent vers leurs valeurs point fixe.

Dans la région critique, nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \chi(q, \omega = \omega_0^{\text{eff}}) &\simeq \frac{1}{2} \frac{1}{q^{z - \frac{1}{2}(\eta + \bar{\eta})}} \left[ \frac{e^{i\theta(q)}}{2c_{\text{eff}} + i\gamma_{\text{eff}}q^{\omega_3}} \right] \\ \chi(q = 0, \omega) &\simeq \frac{1}{2} \frac{e^{i\theta(\omega - \omega_0^{\text{eff}})}}{\left( -i\Lambda_{\text{eff}} \frac{\omega - \omega_0^{\text{eff}}}{|\omega - \omega_0^{\text{eff}}|} + c_{\text{eff}} \right)} \\ &\times \frac{1}{\left\{ |\omega - \omega_0^{\text{eff}}| \left[ (1 + \delta_{\text{eff}}) + \rho_{\text{eff}} |\omega - \omega_0^{\text{eff}}|^{\frac{1}{2\nu} - 1} + \sigma_{\text{eff}} |\omega - \omega_0^{\text{eff}}|^{1 - \frac{\eta + \bar{\eta}}{2z}} \right] \right\}^{1 - \frac{1}{2z}(\eta + \bar{\eta})}} \end{aligned} \quad (7.35)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \theta(q) &= \theta_{\text{eff}} + \alpha_{\text{eff}}q^{\omega_2} + \beta_{\text{eff}}q^{\omega_3} \\ \theta(\omega - \omega_0^{\text{eff}}) &= \theta_{\text{eff}} + \alpha_{\text{eff}} \left| \omega - \omega_0^{\text{eff}} \right|^{\omega_2/z} + \beta_{\text{eff}} \left| \omega - \omega_0^{\text{eff}} \right|^{\omega_3/z} \end{aligned} \quad (7.36)$$

Ces expressions ne sont valables qu'à condition de pouvoir négliger l'influence de l'évolution des paramètres non pertinents sous renormalisation, ce qui devient faux lorsque l'on se situe loin du point fixe. Les corrections dues à leur présence sont discutées à l'ordre dominant dans la section 7.5.

## 7.4 Brisure et restauration asymptotique de la relation Fluctuation-Dissipation généralisée

Le point fixe du groupe de renormalisation que nous avons calculé correspond, dans un référentiel oscillant à une fréquence effective qui dépend de l'échelle, et après élimination d'un facteur de phase dépendant également de l'échelle, au point fixe du modèle  $O(2)$  dynamique. Dans ces conditions, si nous nous plaçons exactement au point fixe de la théorie, la relation Fluctuation-Dissipation généralisée (2.58), que nous avons dérivée dans un cas particulier de notre théorie, devient vraie. En particulier, pour la théorie critique, le point fixe est attracteur aux grandes échelles ; nous sommes donc en mesure d'affirmer le théorème suivant : à la transition de phase, et bien que notre dynamique soit loin de l'équilibre thermique, une relation généralisée de la relation Fluctuation-Dissipation devient vraie aux grandes échelles.

Ce phénomène peut être remplacé dans un cadre plus général. Nous sommes en effet en présence de ce que l'on appelle une restauration dynamique de symétrie au point critique. La relation Fluctuation-Dissipation découle en effet



des relations de bilan détaillé, qui sont liées à l'invariance par renversement temporel de l'action des dynamiques d'équilibre. Cette symétrie, ou plus exactement sa généralisation (2.58), est asymptotiquement restaurée aux grandes échelles pour notre théorie critique. Ce phénomène de restauration de symétrie peut apparaître dans de nombreuses théories critiques statiques et dynamiques. En particulier, le modèle  $O(n)$  statique est très stable vis à vis de perturbations introduites par des termes cubiques [87, 107], mais aussi si l'on étudie l'effet de tenseurs de couplage plus généraux [10]. Dans sa version dynamique, il est également stable sous certaines perturbations, comme l'introduction de bruits anisotropes [133, 134, 122]. Dans nombre de ces modèles, cependant, la dynamique d'équilibre reste à la base de la dérivation du modèle. Les nouvelles classes d'universalité hors équilibre, même si la démarche précédente peut en fournir [131], ne sont souvent obtenues qu'en dérivant des équations dynamiques intrinsèquement hors équilibre. C'est le cas notamment de l'équation KPZ et des dynamiques de réaction-diffusion dont nous avons parlé dans l'introduction. La dynamique des oscillateurs couplés (2.1), dérivée de la forme normale de la bifurcation de Hopf, est une théorie intrinsèquement hors équilibre. Elle restaure cependant une symétrie au point fixe qui, après changement de référentiel, s'apparente à la relation Fluctuation-Dissipation.

Dans la théorie générale, la relation est brisée. Au point fixe déjà, le changement de référentiel est nécessaire pour retrouver la relation habituelle. La présence d'une fréquence propre dans le système, liée à  $\omega_0$ , et d'un facteur de phase  $\theta$  entre force et vitesse, brise la relation d'équilibre (2.55) et la transforme en la relation généralisée (2.58). Si nous nous écartons du point fixe, la relation (2.58) est également brisée. En termes du champ  $\phi$  défini en (4.69) et qui mène à la solution des équations de Callan-Symanzik (4.84), la relation Fluctuation-Dissipation généralisée s'écrit :

$$\gamma''_{11}[\phi](\mathbf{q}, \omega) = \frac{\omega}{2D} G_{11}[\phi](\mathbf{q}, \omega) \quad ; \quad \gamma'_{12}[\phi](\mathbf{q}, \omega) = i \frac{\omega}{2D} G_{12}[\phi](\mathbf{q}, \omega) \quad (7.37)$$

A partir des équations de Callan-Symanzik (4.72), et en utilisant le fait que la matrice des corrélateurs à deux points de la théorie est donnée par l'inverse de la matrice  $\tilde{\Gamma}^{(2)}$  (Eq. (2.36)), nous pouvons dériver des équations de Callan-Symanzik pour les fonctions de corrélation et de réponse. Nous introduisons la quantité  $F(\mathbf{q}, \omega; c, \vec{g}, r, \mu')$ , définie par :

$$\gamma''_{11}[\phi](\mathbf{q}, \omega, \vec{g}) = \frac{\omega}{2D} F(\mathbf{q}, \omega, \vec{g}) G_{11}[\phi](\mathbf{q}, \omega, \vec{g}) \quad (7.38)$$

où la dépendance dans les autres paramètres de la théorie est sous-entendue. Au point fixe  $\vec{g}^*$ , la relation (7.37) est satisfaite et la quantité  $F(\mathbf{q}, \omega, \vec{g}^*)$  est identiquement égale à 1. Ainsi, sa valeur caractérise-t-elle la brisure de la relation Fluctuation-Dissipation généralisée. Elle satisfait l'équation de Callan-Symanzik suivante :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu'} + \vec{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{g}} + \bar{\gamma}_\omega \frac{\partial}{\partial \omega} - \gamma_r \frac{\partial}{\partial \ln r} \right] F(\mathbf{q}, \omega, \vec{g}) = \left[ \gamma_\omega + \frac{1}{2}(\gamma - \tilde{\gamma}) \right] F(\mathbf{q}, \omega, \vec{g}) \quad (7.39)$$

Nous remarquons que la quantité  $\gamma_\omega + \frac{1}{2}(\gamma - \tilde{\gamma})$  est, au point fixe, égale à zéro. Il s'agit en réalité de la relation (4.48) reliant les exposants critiques du modèle  $O(n)$  dynamique à tout ordre en théorie des perturbations, et que nous avons d'ores et déjà commentée dans le paragraphe 4.3.5. En adoptant une démarche similaire à celle que nous avons exposée pour obtenir la fonction de réponse linéaire de la théorie, nous pouvons déterminer l'expression de cette quantité dans le régime critique et dans le régime où la théorie champ moyen est valide. Dans la zone critique, nous utilisons le fait que nous connaissons la valeur au point fixe :  $F(\mathbf{q}, \omega, \vec{g}^*) \equiv 1$ . Dans l'autre limite, nous utilisons la valeur obtenue dans le cadre de la théorie champ moyen :

$$F^L(\mathbf{q}, \omega, \vec{g}) = \frac{\omega^2 + R^2 - (c_a q^2)^2}{\omega^2 + R^2 + (c_a q^2)^2} \quad (7.40)$$

Nous remarquons qu'en champ moyen, c'est bien la présence du paramètre  $c_a$  qui brise la relation Fluctuation-Dissipation. Entre ces deux régimes extrêmes, une analyse similaire à celles de la section ?? peut être effectuée pour étudier le comportement de cette quantité.

## 7.5 Corrections aux lois d'échelle

Comme nous l'avons déjà signalé, aux petites échelles, la présence des paramètres non pertinents de la théorie affecte les lois d'échelle. Comme nous allons le voir, et comme c'est le cas pour le modèle  $O(n)$ , si nous nous écartons du point fixe, les lois d'échelle sont modifiées d'une part par la présence d'un facteur multiplicatif, et d'autre part par celle d'un terme additif [2]. La correction aux lois d'échelle est donnée par la linéarisation des équations de groupe de renormalisation autour du point fixe. Nous définissons la quantité  $C^{(N,P)}(\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}, r, \mu')$  de la façon suivante :

$$\widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}, r, \mu') = C^{(\tilde{N}, N)} \widehat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}^*, r, \mu') \quad (7.41)$$

Comme c'était le cas pour la quantité  $F(\mathbf{q}, \omega, \vec{g})$  qui caractérisait la brisure de la relation Fluctuation-Dissipation, la quantité  $C^{(\tilde{N}, N)}$  vaut 1 au point fixe, et sa valeur caractérise la brisure des lois d'échelle. Elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \ln \mu'} + \vec{\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{g}} + \sum_{i(j)=1}^{N(P)} \gamma_{\omega_{i(j)}} \frac{\partial}{\partial \omega_{i(j)}} - \gamma_r \frac{\partial}{\partial \ln r} \right] C^{(\tilde{N}, N)} = \left[ (\tilde{N} + N - 1)(\gamma_\omega - \gamma_\omega^*) + \frac{\tilde{N}}{2}(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}^*) + \frac{N}{2}(\gamma - \gamma^*) \right] C^{(\tilde{N}, N)} \quad (7.42)$$

dont la solution s'écrit :

$$\begin{aligned}
 C^{(\tilde{N}, N)}(\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}, r, \mu') = \\
 \exp \left\{ - \int_0^{\ln s} \left[ (\tilde{N} + N - 1)(\gamma_\omega - \gamma_\omega^*) + \frac{\tilde{N}}{2}(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}^*) + \frac{N}{2}(\gamma - \gamma^*) \right] d \ln s' \right\} \times \\
 \times C^{(\tilde{N}, N)} \left( \frac{\mathbf{q}_{i(j)}}{s}, \frac{\omega_{i(j)}(s)}{s^2}; c, \vec{g}(s), \frac{r(s)}{s^2}, \mu' \right)
 \end{aligned} \tag{7.43}$$

La solution des équations linéarisées (7.19) nous permet, près du point fixe, d'écrire l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 C^{(\tilde{N}, N)} \left( \frac{\mathbf{q}_{i(j)}}{s}, \frac{\omega_{i(j)}(s)}{s^2}; c, \vec{g}(s), \frac{r(s)}{s^2}, \mu' \right) = 1 + \\
 + (\vec{g} - \vec{g}^*)^t \cdot \exp \{ \underline{\underline{\omega}}^t \ln s \} \cdot \frac{\partial C^{(\tilde{N}, N)}}{\partial \vec{g}} \left( \frac{\mathbf{q}_{i(j)}}{s}, \frac{\omega_{i(j)}}{s^2}; c, \vec{g}^*, \frac{r}{s^{1/\nu}}, \mu' \right)
 \end{aligned} \tag{7.44}$$

où dans le vecteur dérivé de  $C^{(\tilde{N}, N)}$  apparaissent les dépendances au point fixe, et où  $\underline{\underline{\omega}}$  est la matrice donnée en (7.20). Nous pouvons alors, dans le voisinage du point fixe, écrire la solution suivante pour les fonctions de corrélations complètes  $\hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi]$  :

$$\begin{aligned}
 \hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}, r, \mu') = \hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}^*, r, \mu') \times \\
 \times \exp \left\{ - \int_0^{\ln s} \left[ (\tilde{N} + N - 1)(\gamma_\omega - \gamma_\omega^*) + \frac{\tilde{N}}{2}(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}^*) + \frac{N}{2}(\gamma - \gamma^*) \right] d \ln s' \right\} \times \\
 \times \left\{ 1 + (\vec{g} - \vec{g}^*)^t \cdot \exp \{ \underline{\underline{\omega}}^t \ln s \} \cdot \frac{\partial C^{(\tilde{N}, N)}}{\partial \vec{g}} \left( \frac{\mathbf{q}_{i(j)}}{s}, \frac{\omega_{i(j)}}{s^2}; c, \vec{g}^*, \frac{r}{s^{1/\nu}}, \mu' \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{7.45}$$

où  $\hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}^*, r, \mu')$  suit les lois d'échelle (4.87). Ainsi les valeurs propres (7.21) de la matrice  $\underline{\underline{\omega}}$  donnent les premières corrections universelles aux lois d'échelle.

Il nous faut noter le fait habituel suivant : d'autres sources de corrections aux lois d'échelle existent dans la théorie. Notamment, nous n'avons pas tenu compte des paramètres trivialement non-pertinents dans notre calcul. On peut toutefois montrer que les effets dus à la présence de ces paramètres donnent des corrections aux lois d'échelle ayant des exposants de l'ordre de l'unité lorsque l'on se situe près de 4 dimensions, alors que la matrice  $\underline{\underline{\omega}}$  ne contient que des termes d'ordre  $\varepsilon$  et  $\varepsilon^2$ . Ces corrections sont donc les plus importantes près de la région critique, puisqu'elles correspondent à des termes qui s'annulent le plus lentement lorsque  $s$  tend vers 0 [2].



# Discussion

Au cours de ce travail, nous avons étudié le comportement critique d'oscillateurs couplés en grand nombre, placés au voisinage d'une instabilité dynamique oscillante homogène ou bifurcation de Hopf. Nous avons vu qu'en présence de fluctuations la dynamique générique d'un tel système pouvait être décrite en termes d'un formalisme de théorie statistique des champs hors équilibre, et que le comportement critique pouvait être étudié par les méthodes du groupe de renormalisation dynamique perturbatif. De façon à trouver le point fixe d'une transition oscillante, nous avons dû effectuer les transformations de renormalisation dans un référentiel oscillant à une fréquence et possédant un décalage de phase par rapport au référentiel originel qui dépendaient de l'échelle à laquelle on considérait le système. Le retour au référentiel originel nous permettait de déduire la fréquence et la phase des oscillations spontanées à la transition, qui ne constituent pas des quantités universelles. Dans ce référentiel oscillant, le point fixe du groupe de renormalisation est celui du modèle  $O(2)$  dynamique. Une version généralisée de la relation Fluctuation-Dissipation est dynamiquement restaurée à la transition et les exposants critiques du modèle  $O(2)$  décrivent le comportement critique des oscillateurs couplés à l'ordre dominant. Toutefois, de nouveaux exposants universels ont été calculés ; ils décrivent l'évolution de la phase et de la pulsation effectives autour de leurs valeurs points fixes, ainsi que les corrections aux lois d'échelle. Enfin, la structure des points fixes de la théorie est qualitativement très différente en dimension d'espace supérieure à 4 et inférieure à 4, et la limite vers la dimension 4 constitue une limite singulière du comportement de la théorie sous renormalisation.

Les résultats de notre étude soulèvent de nombreuses autres questions concernant le comportement critique des oscillateurs couplés. Tout d'abord, la structure des points fixes a été établie perturbativement à l'ordre de deux boucles. A cet ordre en théorie des perturbations, nous sommes en possession de la première correction non triviale au comportement prévu par la théorie champ moyen. Perturbativement en  $\varepsilon$ , nous connaissons donc la stabilité du point fixe du modèle  $O(2)$  à l'ordre dominant, et ceci nous assure sa stabilité suffisamment près de la dimension 4. En revanche, notre étude ne nous permet pas de conclure sur le comportement critique du système loin de la dimension 4 (en particulier en dimension 3). Nous pouvons nous demander le point fixe du modèle  $O(2)$  reste stable lorsque l'on voyage en dimension. Si c'était le cas, un argument général, sans doute basé sur l'existence d'une symétrie cachée dans le problème, devrait pouvoir être mis en évidence. Deuxièmement il serait intéressant d'étudier le comportement du système lorsque celui-ci approche la transition du côté oscil-

lant. Comme nous l'avons signalé, la dynamique déterministe associée est alors beaucoup plus riche que la dynamique du modèle  $O(2)$ . Notamment, du côté Benjamin-Feir instable de l'espace des paramètres, la dynamique déterministe est chaotique. Dans ces conditions, la définition d'une théorie des champs décrivant correctement le comportement critique pourrait comporter de nouveaux aspects par rapport à ceux existants dans les dynamiques d'équilibre. Il serait également intéressant d'étudier le comportement critique du système au voisinage de la dimension 2 d'espace, qui constitue la dimension critique inférieure de la théorie. Au voisinage de cette dimension nous savons, d'après l'étude des phénomènes critiques statiques, que les développements de Ginzburg-Landau ne permettent pas une bonne description de la théorie effective, et qu'une fonction de partition avec une action non-polynomiale dans le paramètre d'ordre et ses dérivées doit être écrite [150, 2, 91]. Dans le cas d'une symétrie rotationnelle pour un paramètre d'ordre à  $n$  composantes, le cas  $n = 2$ , ou modèle  $XY$ , constitue un cas tout à fait particulier, présentant une transition de phase qualitativement différente de celle observée au voisinage de la dimension 4 [89], et possédant un paramètre de contrôle marginal sous renormalisation [138]. Une généralisation de ces modèles statiques à la dynamique des oscillateurs reste à écrire. Plus généralement, l'emploi de techniques de renormalisation non perturbative [33, 15] nous permettrait d'étudier le comportement critique d'un tel système dans d'autres dimensions, en particulier en dimension 3. D'autre part, dans le cas des modèles  $O(n)$  dynamiques, nous savons que nous trouvons de nouvelles classes d'universalité hors équilibre lorsque la dynamique est écrite dans le cas d'un paramètre d'ordre conservé et avec un bruit anisotrope [131]. Une dynamique des oscillateurs avec paramètre d'ordre conservé pourrait nous donner une nouvelle classe d'universalité hors équilibre. Une autre classe de modèles que nous pourrions aussi générer serait décrite en termes d'une variable dynamique  $Z$  "généralisée", dont chacune des composantes posséderait la symétrie  $O(n)$ . Le groupe de symétrie de la théorie serait alors le groupe  $O(n) \times U(1)$ . Enfin dans l'oreille interne des mammifères, les cellules ciliées de la cochlée, qui constituent possiblement les oscillateurs individuels bruités responsables du comportement non linéaire qui est observé (voir introduction), répondent préférentiellement à des fréquences différentes. La description de leur couplage mécanique à travers la membrane basilaire serait mieux décrite par une théorie des champs dont la fréquence  $\omega_0$  dépendrait de la position dans l'espace  $\mathbf{x}$ . Dans le cadre de la Théorie Quantique des Champs, nous savons que si nous imposons à une symétrie globale de devenir vraie localement, nous sommes amenés à introduire un nouveau champ, appelé dans ce cadre "champ de Jauge", qui intervient dans la théorie au travers de l'expression d'une dérivée dite "covariante", et qui décrit les interactions. Dans ce contexte, cette démarche constitue un mécanisme général de construction de lagrangiens pour les théories de Jauge en interaction [150, 85]. Dans notre contexte, avec la présence d'un paramètre  $\omega_0(\mathbf{x})$ , la transformation permettant l'élimination de la fréquence deviendrait une transformation dépendant de la position. La présence de dérivées spatiales dans l'équation dynamique nécessiterait l'introduction d'un champ dynamique auxiliaire, que nous pourrions appeler "champ de Jauge", et qui permettrait d'écrire une dynamique localement invariante de phase et contenant une dérivée

covariante. Nous pouvons nous demander si une telle démarche mènerait à l'écriture d'un modèle physiquement raisonnable et mathématiquement fondé. Plus généralement, les extensions présentées ci-dessus nous sont seulement suggérées par notre travail ; la pertinence physique ainsi que la validité mathématique de ces extensions restent à établir.









Deuxième partie

English summary of the thesis



This part consists of the English short version of my PhD thesis. Some of the references present in the original text have not been reproduced in this summary.



# Preface

One of the main theoretical challenge in Physics consists in underlining “universal” properties among the variety of behaviors we observe in physical systems. One of the most early and prominent example of this achievement consists in the “Universal Gravitational Law” formulated in 1687 by Isaac Newton in his main work : *Philosophiae naturalis principia mathematica*. With this theory, we formulate a conceptual explanation of the laws which govern the behavior of massive bodies, as well as a theoretical framework which allows us to make quantitative predictions on their movement. We say that we possess a law of Physics.

This work concerns the characterization of universal and nonuniversal properties in the behavior of systems of coupled oscillators which are operating in the proximity of a continuous uniform oscillatory instability, or super-critical Hopf bifurcation. In the presence of noise, we show that the Hopf bifurcation of coupled oscillators corresponds to the critical point of an out of equilibrium second-order phase transition, canonically described by the complex Ginzburg-Landau equation with an additive noise term. We characterize its universal and nonuniversal properties when we approach the transition from the nonoscillatory domain of the phase diagram. The technical and theoretical framework of our study is the dynamic perturbative renormalization group. We show that the universal behavior of the system is characterized by scaling laws, quantified by a set of critical exponents which we calculate to the first nontrivial correction in perturbation theory. We focus on the two-point correlation function and the linear response function to an external oscillatory stimulus in the critical regime.

The first chapter is an introduction to the present work. We motivate our study by the observation and the modelization of the behavior of certain active biological systems. Then we introduce the techniques of theoretical physics we use for the present study, and which have shown to be fruitful in other contexts in the past. Chapter 2 presents the general theoretical formalism which will form the framework of our study, and uses the knowledge of standard dynamical critical theories to establish the presence of a dynamic phase transition in the system. The theory we propose to study corresponds to the “complex Ginzburg-Landau field theory”. Chapter 3 presents the mean-field theory of our system, which gives correct quantitative results in space dimensions larger than 4. Chapter 4 forms the central part of the thesis. It establishes the structure of the renormalization group of the theory to all order in perturbation theory in Wilson’s as well as in Callan-Symanzik’s frame techniques. Wilson’s renormali-

zation scheme is of historical importance and well-adapted to the one-loop order calculations. Moreover, it is intuitive and well-suited to explain the new aspects which are specific to systems of coupled oscillators. However, to go further in perturbation theory, the Callan-Symanzik's frame technique is better suited. In chapter 5 we present in details the renormalization group calculations of the theory within Wilson's scheme to the one-loop order in perturbation theory. It is shown that the results are insufficient to know qualitatively the complete structure of the renormalization group of the theory. Chapter 6 presents the two-loop order calculations within Callan-Symanzik's scheme, and chapter 7 exposes the main results and conclusions of our study. Appendix A presents the most important notations we are using all along the thesis. The other appendixes will be presented later.



# Chapitre 1

## Out of equilibrium stochastic systems and critical behaviors

Study of physical properties of out of equilibrium systems is one major research topic in actual statistical physics. Far from equilibrium, we cannot write an effective free energy associated with the system, and a detailed description is often needed. However, sufficiently close to dynamic instabilities, certain properties of these systems are universal, and can be studied in a general theoretical framework. Renormalization group techniques, developed originally in Quantum Field Theory and applied to static and later to dynamic critical phenomena, give us a theoretical foundation to the understanding of the emergence of Universality in behaviors of systems which are operating close to second-order phase transitions [83, 141, 142, 61]. These concepts and techniques can be extended to the classification and study of out of equilibrium critical phenomena (See for example [44, 59, 43, 134, 45, 60, 122, 131, 130]).

### 1.1 Stochastic active biological systems

Biological systems, intrinsically active, present an amazing collection of various behaviors [1]. One of the most striking example of such active behaviors is probably the ability of living bodies to move and exert forces.

#### Motor proteins and active cellular structures

Such properties are generated at the molecular level by specific proteins, called “molecular motors” [65]. These proteins can hydrolyze ATP in ADP, and use the energy released by this reaction to move or exert forces on the cytoskeleton of the cell they belong to. There exists a huge number of such motor proteins. Let us quote three families of them : “dyneins”, “kinesins” and “myosins”. They belong to the class of “linear” motor proteins, and move or exert forces on linear “tracks”, made up of biopolymers [7, 124, 64].

Models have been developed to study the general mechanics of these linear motor proteins [116, 20, 4]. When a large number of motors are linked together, collective dynamic effects can lead to dynamic instabilities [79]. The

force-velocity curve deduced from a 2-state model is shown Figure 1.1 [78]. For  $\Omega > \Omega_c$  (where  $\Omega$  is related to the hydrolysis rate of ATP by motors), several solutions for the speed at a given external force can be found. When, moreover, the motors are linked to the track they move on with an elastic element, spontaneous oscillations can occur.  $\Omega = \Omega_c$  corresponds to the critical point of a Hopf bifurcation.

### Critical oscillations, amplification and frequency selectivity of the auditory organ

Detection of sound by mammals is due to the presence of “hair cells” within the cochlea [52, 25] (See Fig. 1.2,1.3). Sound stimuli entering the inner ear settle the cochlear fluid into motion and induce a deformation of the basilar membrane which propagates from the base towards the apex. The transformation of the mechanical signal into a nervous one is performed by the hair cells [68]. These cells possess a protrusion at their tip, called “hair bundle”, which is made of about ten to hundred “stereocilia” (see Fig. 1.4, taken from an American bullfrog). When a shearing deformation is produced by the entrance of a sound wave, “tip links” are stretched and cause the opening of ion channels located within the membrane of the stereocilia [82] (see Fig. 1.5). An ion flux enters the cell, creates a depolarization of the membrane which leads to a nervous signal [63].

The hearing organ is an extremely efficient detector. To capture faint sounds, the wave-like disturbance is augmented by an active mechanism, possibly located within the hair cells, which amplifies the passive response of the ear [48]. Spontaneous oscillations of individual hair cells have been observed [97]. Their response to an external oscillatory stimulus at the critical frequency shows a nonlinear behavior [98], and the fluctuation-dissipation theorem is broken in the system [99].

Different mechanisms have been proposed to explain these observations [69, 63, 100]. More generally, the system presents the characteristics of a system operating close to a Hopf bifurcation point [99]. This is the point where it is most sensitive to external stimuli. At the cochlear scale, the mechanical response of the basilar membrane reveals a highly nonlinear behavior of the hearing organ [36, 119]. The amplitude of the propagating wave varies along the membrane [151], amplified by an active position-dependent mechanism [35]. In particular, the mechanical response in a given point of the basilar membrane, as a function of the amplitude of the incident sound wave, shows a nonlinear behavior which is characteristic of a power law on a large range of amplitudes [121] (Fig. 1.6). It has been proposed that each hair cell is a self-tuned critical oscillator : the scaling behavior observed in the mechanical response of the basilar membrane to an external oscillatory stimulus can be reproduced by the generic equations which describe the behavior of dynamic systems operating in the proximity of a super-critical Hopf bifurcation. Equation (1.1) describes the behavior of the first Fourier mode  $X_1$  in response to an oscillatory stimulus  $F(t) = F_1 e^{i\omega t} + F_{-1} e^{-i\omega t}$  (where  $F_{-1} = F_1^*$ ).  $\mathcal{A}(\omega, C)$  and  $\mathcal{B}(\omega, C)$  are complex numbers which depend on the frequency  $\omega$  and the control parameter  $C$ . At the Hopf bifurcation point  $C = C_c$ ,  $\mathcal{A}(\omega, C_c)$  is zero for a given frequency  $\omega_c$ , called the “critical frequency”.

At this point and at the critical frequency, the response of the system exhibits a compressive nonlinearity (Eq. (1.2)). This generic behavior allows the system to amplify faint sounds and minimize loud ones. A feedback mechanism keeps the system close to the critical point of the Hopf bifurcation [13, 12, 77]. These generic properties can explain much of the experimental data concerning the response of the whole cochlea to external sound-wave stimuli [95].

At the hair bundle scale, the observed spontaneous oscillations are highly noisy [98, 99]. These fluctuations are due to different stochastic aspects of the system, like finite temperature effects and the stochasticity of the chemical reactions involved in the active machinery, and which are responsible for the consumption of the chemical fuel ATP. A theoretical description which takes these effects into account is necessary [81]. At the scale of the cochlea, thousands of hair cells are mechanically coupled, and a description of coupled oscillators in the presence of noise is needed. The effects of noise on the dynamics of coupled oscillators has been the topic of numerous works (see for example, and among others [113, 42]). Surprisingly, the noise can very often synchronize the oscillations [102, 112, 148, 149]. In spatially extended systems, the generic equation describing an oscillatory uniform instability is the complex Ginzburg-Landau equation [108, 3]. This equation has been often studied in the context of pattern formation [23]. Its phase diagram is highly nontrivial, and the noise can once again synchronize the dynamics [30, 31, 115].

In this thesis, we study the critical properties of the super-critical Hopf bifurcation of coupled oscillators in the presence of noise. We consider the thermodynamic limit of a infinite number of oscillators coupled in a  $d$ -dimensional space when they approach the transition from the nonoscillatory region of the phase diagram.

## 1.2 Dynamic instabilities and out of equilibrium universal behaviors

In this section, we present the generic equations which describe the dynamics of a spatially extended system in the proximity of an oscillatory uniform instability in the presence of noise. We summarize some basic results derived from the study of dynamic systems and we show how to introduce the forcing term as well as the fluctuations in the generic equations issued from these studies. We summarize the concepts and ideas of the renormalization group which is used to study the critical behavior of physical systems in the proximity of second-order phase transitions.

### 1.2.1 Bifurcations and dynamic instabilities

#### Bifurcations

In this section, we present the general mathematical framework related to bifurcations, and specify the general properties of the Hopf bifurcation.

A bifurcation is a qualitative change in the long-time behavior of a given dynamic system, when we vary the value of one or several parameters, called

“control parameters”. Without spatial dependence, the linearized equations (1.6) around a given steady-state solution  $\mathbf{Q}_0$  which becomes unstable, have at least one eigen value which crosses the real axis. Two generic cases can be distinguished, depending on the imaginary part of the eigen value of the unstable mode : saddle-node type bifurcations or Hopf bifurcation (Fig. 1.7). In the first case, one can restrict the description of the dynamics to the evolution of one real variable  $Y$ , and if we impose the symmetry  $Y \rightarrow -Y$ , the dynamics can always be written under the form (1.7), which corresponds to the “pitch-fork” bifurcation. If  $u$  is positive, the development (1.7) is sufficient and the bifurcation is said to be “super-critical”.

### Hopf bifurcation

In the second case, and in the super-critical case (i.e. if  $u$  is positive), one can write the dynamics under the normal form (1.8), where  $Z$  is a complex variable and the different parameters are real. With respect to the control parameter  $-r$ , the bifurcation diagram is shown Fig. 1.8, in the super- and sub-critical cases (dotted lines represent unstable solutions, and plain lines represent stable ones). Two solutions of the permanent regime can be found :

- i) The trivial solution  $Z(t) \equiv 0$ , stable for  $r > 0$ , unstable otherwise.
- ii) The so called “limit-cycle” solution  $Z(t) = \sqrt{\frac{-r}{u}} e^{-i\omega_s t}$ , with  $\omega_s = \omega_0 - r u_a/u$ , which exists only for  $r < 0$ , and which is then stable.

### Revisited Hopf bifurcation

Physically, we are interested in the oscillations of a dynamic variable  $X$  as a function of an external sinusoidal stimulus,  $F(t) = F_1 e^{i\omega t} + F_{-1} e^{-i\omega t}$  (where  $F_{-1} = F_1^*$ ). In the establishment of the normal form (1.8), the first step consists in diagonalizing the matrix of the linearized dynamics around the steady state solution which becomes unstable. One can prove that one can always choose the complex variable  $Z$  such that the equation (1.11) takes place. Then the equation (1.1) becomes an equation for the first Fourier mode  $Z_1$  (indeed  $X_1 \simeq (Z_1 + Z_{-1}^*)/2 \simeq Z_1/2$ ). This proves that, sufficiently close to the bifurcation point, the external force can be included in the normal form in the way presented in the equations (1.12) to (1.14), i.e. linearly. In these equations,  $F$  is the physical force and  $f$  a complex external forcing related to  $F$  by (1.14).

### Uniform oscillatory instability

In spatially extended systems, the generic equation which describes the dynamics in the proximity of an oscillatory instability is the complex Ginzburg-Landau equation [3, 96]. In this section, we sum up the standard arguments leading to this equation. With similar arguments to those presented in the previous section concerning the external force, the generic dynamic equation describing systems in the proximity of a uniform super-critical oscillatory instability in the presence of an external force is the equation (1.15).  $c$  and  $u$  are supposed to

be positive real numbers, and  $Z(\mathbf{x}, t)$  and  $f(\mathbf{x}, t)$  are now fields defined on a  $d$ -dimensional space and depend on the time  $t$ .

## 1.2.2 Out of equilibrium critical behaviors and renormalization group

### Importance of fluctuations

In the previous presentation, the obtained equations were deterministic. The arguments we used to derive such deterministic dynamics rely on the fact that the modes which differ from the critical one are associated with eigen values which have truly negative real parts at the bifurcation; these modes should then relax towards constant values which should not influence the long time qualitative dynamics of the system.

In physical systems however, the slow macroscopic observable modes are coupled to a large number of microscopic degrees of freedom. In the case of equilibrium dynamics for example, these microscopic degrees of freedom constitute a thermal bath, with purely imaginary eigen values in the linearized dynamic equations (Newton microscopic dynamics for example, which does not contain any friction coefficient). The behavior of the system is then better described by considering that the long-time dynamics relaxes towards a Boltzmann equilibrium distribution of states rather than a defined static state. The large number of fast microscopic modes is taken into account via an additive noise term which, for the study of critical phenomena, can be taken Gaussian and white. We justify this choice in the appendix B. In the case of biological systems moreover, this noise contains a contribution coming from the stochasticity of the active machinery which is based on chemical reactions. These fluctuations can also be taken into account in the stochastic force, but the correlators of the noise can then break the Einstein relation.

Dynamic phase transitions are the result of the competition between the order desired by the microscopic interactions, and the disorder desired by the noise. In the remaining of the paragraph, we present the main ideas and aspects of thermodynamic phase transitions. We stress the difference between the language of phase transitions, for which fluctuations play a crucial role, and the language of dynamic instabilities, for which the fluctuations can be most of the time ignored.

### Universality and renormalization group

In this section, we present briefly the ideas of the renormalization group, and show how the concept of “Universality” finds a founded theoretical explanation in this context. In this formalism, universal quantities appear as properties of saddle-node type fixed points.

We expose an brief historical review of the main important achievements of the renormalization group techniques in the study of static, dynamic, and finally out of equilibrium critical phenomena (see references on pages 31 to 33).

We conclude the chapter by introducing the topic of this thesis. We propose to study the critical properties of an out of equilibrium dynamic phase

transition. We are interested in the characterization of the universal and nonuniversal critical properties of systems of coupled oscillators which are operating close to a continuous homogeneous oscillatory instability (or super-critical Hopf bifurcation). We consider the thermodynamic of an infinite number of coupled oscillators in a  $d$ -dimensional space, and we approach the transition from the nonoscillatory regime. We are especially interested in the characterization of the two-point correlation function of the theory as well as of the linear response function of the system to an external oscillatory stimulus in the critical regime.

## Chapitre 2

# Field theory of coupled oscillators

We present here the general theoretical formalism that we will use in the following of the thesis to study the critical behavior of systems of coupled oscillators.

### 2.1 Physical quantities and general dynamics

#### 2.1.1 Generic dynamic equation

As it has been justified in the first chapter, the generic dynamic equation for our problem is the equation (2.1). In this equation,  $Z(\mathbf{x}, t)$  is a complex field depending on the time  $t$ , and defined on a  $d$ -dimensional space.  $\Delta$  is the Laplacian operator,  $f$  an external field and  $\eta$  a Gaussian white noise. The different parameters are real numbers,  $c$  and  $u$  are positive and  $i$  is the complex number of square  $-1$ . Without noise and external field, this equation is invariant under the transformation  $Z \mapsto Z \exp(i\Theta)$ , which is actually the  $U(1)$  symmetry, and which will be referred to as “phase invariance” in the following. The link between the physical observable quantities and the quantities which appear in this generic equation are given by the equation (2.2). In this equation,  $\Lambda$  is a real positive number and  $\theta$  a phase. If  $Z$  represents a position,  $\Lambda$  represents a friction coefficient, and  $\theta$  a phase shift between velocity and external force.

#### 2.1.2 Noise correlator

We justify in appendix B that the noise should be chosen Gaussian and white. In this section, we justify the choice (2.6) for the correlator of the noise by two arguments : the first one consists in showing that the correlator  $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle$  does not change the critical scaling laws of the critical mode  $\omega_0$  to linear order in perturbation theory. Indeed, we see in Eq. (2.5) that the dominant divergence when  $\omega$  get close to  $\omega_0$  is only given by the terms which are proportional to the parameter  $D$ , characterizing the amplitude of the correlator  $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta^*(\mathbf{x}', t') \rangle$ . The second one consists in noticing that the correlator  $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle$  breaks the phase invariance of the theory. Since we know that symmetry properties

are very important for the determination of universality classes, we need this correlator to vanish in order to stay in the Hopf bifurcation universality class. Therefore the choice (2.6) is justified for the correlator of our statistical noise term.

## 2.2 Correlation and response functions

The physical correlation and response functions of the theory are defined in (2.7). Causality is visible in the response function, which is proportional to the Heaviside step-function (2.9). In terms of the fields of the generic equation (2.1), these functions are given by (2.10), where  $\theta$  and  $\Lambda$  are defined in (2.2).

## 2.3 Field theoretical formalism

### 2.3.1 Matricial formalism and two-point functions

In order to simply recover the dynamical  $O(2)$  model as a particular case of our dynamics, we write the complex dynamics (2.1) in terms of two-dimensional real vectors. By splitting the complex field  $Z$  into its real and imaginary parts  $\psi_1$  and  $\psi_2$  ( $Z \equiv \psi_1 + i\psi_2$ ), we get the evolution (2.11). The correlation and response functions are now the  $2 \times 2$  matrixes (2.15) and possess the rotational symmetry (2.16). The physical functions are given by (2.17).

### 2.3.2 Functional generator

Following the idea of Martin, Siggia and Rose [101], the Janssen-De Dominicis formalism [73, 26] uses the introduction of an auxiliary field  $\tilde{\psi}_\alpha$  to write a functional generator for the dynamical theory with an action which has a similar structure to the action of a static theory with a  $\phi^4$  potential [93, 2, 91]. We present the details of this calculation in the framework of the complex Ginzburg Landau field theory we are studying in the appendix D. We insist on the fact that a path-integral formulation is well defined only if we discretize the dynamics in space. The continuous limit can be taken only if we specify the value of the Heaviside step function for  $t = 0$  ( $\theta(0)$ ). It is shown in the appendix D that the expression (2.18) is consistent with the prescription  $\theta(0) = 0$ .

The general correlation functions and connected correlation functions of the theory are given by (2.21). We review their usual properties. In particular, their perturbative development can be represented in terms of Feynman diagrams. The matrix of the two-point correlators is given by (2.25). Because our problem is invariant under space and time translations, the linearized equations are diagonal in the Fourier space, and therefore the calculations will be performed in this space in the following. We then give the expressions of the same quantities in the Fourier space.



### 2.3.3 Effective action

The functional  $\Gamma$ , defined by (2.31), can be seen as an effective action for the theory. Its derivatives (2.34) are represented by the 1-Particle Irreducible Feynman diagrams of the theory without external propagators. They are also often referred to as the “eigen vertexes” of the theory.

The phase invariance gives us the equation (2.35), and its derivatives lead to the Ward-Takahashi identities.

$\underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^{(2)}$ , defined by (2.36), is the inverse of the matrix  $\underline{\underline{\tilde{C}}}^{c,(2)}$  (Eq. (2.37) and in the Fourier space (2.39)). Causality implies (2.40). This property can be demonstrated using (2.22) and (2.37), or perturbatively in terms of Feynman diagrams (see appendix D).

## 2.4 Eliminating $\omega_0$

In the particular case where the parameters  $\omega_0$ ,  $c_a$  and  $u_a$  are zero, our dynamics corresponds exactly to the  $O(n)$  dynamical model, in the particular case  $n = 2$  and written in terms of the model  $A$  of the classification of Hohenberg and Halperin [61]. In this case, the fluctuation-dissipation relation takes place [18, 129]. It is due to the detailed-balance symmetry of equilibrium dynamics (2.52) which is responsible for the time-reversal invariance of the action of the theory.

In the general case, this symmetry is broken in the system and the model we consider forms a strict extension of the  $O(2)$  model. We expect a new universality class at the transition.

### 2.4.1 Oscillatory frame

It is interesting to place the dynamics in an oscillatory frame at the frequency  $\omega_0$  by the transformation  $U = Z \exp(i\omega_0 t)$ . We then get the dynamics (2.41). If we define  $G$  and  $\gamma$  as the correlation and response functions associated with the field  $U$ , the functions we are interested in are connected to these functions by the formulas (2.45) and (2.46) (the last one taking place also for the response function).

### 2.4.2 Exact analogy with a thermodynamic problem

In the case  $c_a = 0$  and  $u_a = 0$ , the dynamics written in terms of the field  $U$  derives from an effective free energy (2.48). In this case, the dynamics relaxes towards the Boltzmann distribution (2.49) and forms a relaxational dynamics. Written in terms of two-dimensional real vectors ( $U = \varphi_1 + i\varphi_2$ ), this dynamics corresponds exactly to the  $O(2)$  dynamics, for which we know the existence of a second-order phase transition with an associated critical point. This property tells us that, at least in a particular case, the complex Ginzburg-Landau field theoretical model indeed describes a Hopf bifurcation of coupled oscillators, which was the original topic of our study. Moreover, in this particular case, we can deduce from the studies of dynamical  $\phi^4$  models the critical properties of coupled oscillators without performing any calculations.

### 2.4.3 General fluctuation-dissipation theorem

Still in the particular case  $c_a = 0$  and  $u_a = 0$ , the action associated with the field  $U$  is symmetric under time-reversal transformations. We can then write the detailed-balance relations (2.52) for this theory [129]. In that case, the two-point correlation and response functions  $G_{\alpha\beta}$  and  $\gamma_{\alpha\beta}$  associated with the field  $U$  are diagonal (Eq. (2.53)). They obey the fluctuation-dissipation relation (2.54), which can also be written (2.55) and (2.56) in the Fourier space.

In the case of equilibrium phase transitions, this relation allows us, knowing one of the correlation or response function, to deduce the other one. These two functions are in this case *the same ones*. In the general case of coupled oscillators, no such relation takes place and these two functions are truly independent. We will see within the renormalization group framework that this fact is responsible for the existence of one more independent critical exponent than in the  $O(2)$  model. However, back to the case  $c_a = 0$  and  $u_a = 0$ , one can deduce the relation (2.58) from the detailed-balance symmetry associated with the field  $U$ . These relations form a “generalized fluctuation-dissipation relation”. Then causality, as usual, gives us the Kramers-Krönig relations (2.59) and therefore we can, in the case  $c_a = 0$  and  $u_a = 0$  and knowing one of the correlation or response function, calculate the other.

We have however to notice the following important point : firstly, in order to do so, we have to know the phase  $\theta$  and the critical frequency  $\omega_0$  which are present in the relation. Then, since  $\theta$  appears only in the response function, the knowledge of the correlation function does not suffice to determine the whole response function. Secondly, the physical directly observable correlation and response functions are the diagonal parts of the matrixes which appear in the formula (2.58). We have then to measure another quantity, whose dynamics is coupled to the dynamic evolution of the variable  $X$  we are interested in, if we want to calculate the correlations starting from the response function.

## Chapitre 3

# Mean field theory of coupled oscillators in the critical regime

In this chapter, we study the critical behavior of coupled oscillators within mean field approximation. We show that the mean field equations can be established within two different approaches which appear to be equivalent. We justify, following the standard Ginzburg argument, that this approximation is valid in space dimensions larger than 4, and that more sophisticated techniques are necessary to study of the critical properties of the system in low dimensions.

### 3.1 Landau approximation

The Landau approximation consists in replacing the path-integral expression of the functional generator by its value at the saddle-point of the action. We can do this approximation starting from two different expressions of the functional generator : the expression (2.18) or the expression (3.1), which has been obtained after integration over the auxiliary field  $\psi_\alpha$ . We establish the consistence of the two methods.

#### 3.1.1 Saddle-point of the theory

We first consider the first derivation of the mean field equations of the theory, starting from the expression (3.1). We call  $\psi_\alpha^L(\mathbf{x}, t)$  the path for which the action contained in the expression (3.1) is stationary. The stationarity condition leads to the equation (3.3) ; the Landau functional generator is given by (3.4), and the Landau  $\Gamma$  functional by (3.6). From this formula, we can easily deduce the derivatives of the  $\Gamma$  functional, directly related to the correlation and reponse functions of the theory.

#### 3.1.2 Tree-level approximation

The Landau approximation previously derived is equivalent to a perturbative diagrammatic expansion of the  $\Gamma$  functional to the “tree-level”. Indeed,  $\underline{\Gamma}_L^{(2)}$  can be derived from the tree-level expression of the two-point correlation and

response functions given in the appendix C (Eq. (C.6)), and using the relation (2.39). The same procedure applied to  $\Gamma_L^{(4)}$  leads to the development (3.8), written in terms of the graphical conventions of the appendix C. In both cases, these expressions are the same as the one derived directly from (3.6) (for  $\Gamma_L^{(4)}$  we get the expression (3.7)). Moreover, higher derivatives of  $\Gamma$  are zero both within the Landau approximation and the tree-level approximation, and the equivalence is established.

We notice the important following property which is a consequence of the phase invariance of the theory : in tenseur (3.8) (or (3.7)), two terms only are independent (Eq. (3.9)) and their knowledge allows us to deduce the whole tensor. This property will be recovered within the renormalization group calculations to the one-loop order.

### 3.1.3 Second point of view

We can also perform the Landau approximation starting from the formulation (2.18) of the functional generator of the theory. We then have to optimize the action with respect to two variations (Eq. (3.10)). We can show that, by eliminating  $\tilde{\psi}_\alpha$ , which is not a physical field, we recover the equations of the first method.

## 3.2 Mean field correlation and response functions

We calculate the two-point correlation and response functions of the theory in the framework of the mean field approximation. In terms of the variables which appear in the generic equation (2.1), these functions are given by the expressions (3.15) and (3.18). The physical two-point functions (2.10) are given by the expressions (3.19).

We finally notice that, starting from the mean field equations (3.11), we can calculate the two-point functions of the theory with nonzero external fields, by inverting the matrix (3.20). In this process the field  $J_\alpha$ , which is unphysical, should always be taken equal to zero.

## 3.3 Hopf bifurcation

### 3.3.1 Homogeneous oscillatory instability

Our mean field equations correspond to the deterministic complex Ginzburg-Landau equation (see Chapter 1), which exhibits a phase transition as the parameter  $r$  changes its sign. Its phase diagram in the oscillatory regime is very rich and complicated [3]. We are interested in the characterization of the critical properties of the theory when we approach the transition from the nonoscillatory domain.

### 3.3.2 Mean field asymptotic behaviors and critical exponents

The critical behavior is only visible in terms of the theory associated with the  $U$  field, defined in section 2.4, and which is settled in the oscillatory frame at the frequency  $\omega_0$ . We give the two-point functions in terms of this field and in the framework of the Landau approximation (Eq. (3.21)). When we approach the transition, the homogeneous and static two-point functions diverge following (3.23).

In the real time space, these functions take the expressions (3.24). This allows us to identify the correlation length  $\xi$  and the correlation time  $\tau$  given, within mean field approximation, by (3.25). The critical divergences at the transition are characterized by the equations (3.26) and by the nonlinear response function at the critical frequency  $\omega_0$  (see Eq. (3.16)).

Finally, we are interested the physical functions (2.17). In terms of these functions, the scaling laws are the same as the ones seen previously, but the divergences appear at the critical modes  $\omega = \pm\omega_0$ . In the direct space, and within mean field approximation, we get the expressions (3.27).

## 3.4 Mean field approximation validity and critical dimensions

In this section, we derive the Ginzburg criterion for the complex Ginzburg-Landau field theory. The demonstration is very similar to the one existing for the  $O(2)$  model, or  $\phi^4$  theory, and the upper critical dimension is also 4. We just have to notice the one-loop expression of  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2)}(k)$ , written in terms of the conventions presented in appendix C, and which will be useful for the renormalization group calculations in Wilson's scheme in chapter 5.

We have to notice that this criterion does not suffice to establish the validity of mean field theory in space dimensions larger than 4. It just shows that the theory is broken under 4 dimensions. We will give a proper argument for its validity above 4 dimensions in subsection 4.1.3. This calculation gives also an infinite value for the critical value  $r_c$  of the control parameter  $r$  in dimension  $d \leq 2$ . This is an indication of the fact that, under 2 space dimensions, fluctuations are strong enough to destroy order in the system, and therefore the transition. This fact is a general feature of continuous phase transitions which break a continuous symmetry [104, 129].



## Chapitre 4

# Renormalization group for coupled oscillators

In this chapter, we present the general structure of the perturbative renormalization group for the complex Ginzburg-Landau field theory to all order in perturbation theory. We establish this structure successively within the two renormalization schemes of Wilson and Callan-Symanzik. Later, in chapters 5 and 6, we will perform the perturbative calculations to one-loop and two-loop orders in perturbation theory using the general structure established here. For these two schemes we remember the main aspects of the standard theory in sections 4.1 and 4.4. Readers familiar with these techniques may ignore these sections. In section 4.2, we present the structure of the renormalization group for coupled oscillators in Wilson's scheme. We show that the renormalization of the fields, usually realized via a real dilatation coefficient, should here include a phase factor renormalization, related to the relative phase between the external forcing and the velocity of the mechanical oscillators (subsection 4.2.3). We then derive the renormalization group equations associated with this scheme and show that they can only lead to the fixed of a nonoscillatory phase transition (subsection 4.2.5). In the section 4.3 we present how to renormalize the theory in order to get the fixed points associated with oscillatory transitions : we have to perform the renormalization group transformations in scale-dependent oscillating frame, i.e. which oscillates with a frequency which depends on the scale at which the system is considered (subsection 4.3.1). Asymptotic critical behaviors are deduced in the frame oscillating at the effective frequency of the spontaneous oscillations at the transition (subsection 4.3.3). Finally, we present in section 4.5 the structure of the renormalization group for coupled oscillators in Callan-Symanzik's scheme, which will be used for the calculations to the two-loop order in chapter 6. We show how to derive and solve the Callan-Symanzik equations of the theory, and how to introduce in this context the specific ideas which are characteristic to the complex Ginzburg Landau field theory, and which have been presented previously in Wilson's scheme.

## 4.1 Wilson’s renormalization scheme

This section exposes the main features of the standard Wilson’s renormalization scheme. It can be ignored by readers familiar with this technique.

### 4.1.1 Renormalization group equations

#### Renormalization of the parameters

We explain that the continuous limit of the path integral (2.18) leads to divergences in perturbation theory, and that a cutoff  $\Lambda$  should be introduced to regularize the theory. Physically, it corresponds in the direct space to the existence of a lattice of mesh  $a$ , on which are located the individual oscillators ( $\Lambda \sim 2\pi/a$ ). This introduction leads to the definition of an effective theory dependent on the scale  $\Lambda$  (Equation (4.1)). An integration over the impulsions located on the shell (which norms are comprised between  $\Lambda/b$  and  $\Lambda$ , where  $b$  is a dilatation coefficient bigger than 1), leads to the definition of an effective intermediate action, defined so that the partition function  $Z$  is unchanged (4.3). To compare both theories, which are defined at different scales, we have to express their parameters in their respective natural units. This operation, called rescaling, leads to the effective renormalized action (4.4). The presence of nonlinear terms in the dynamic equation of motion prevents us from performing exact calculations, and an approximation needs to be implemented. It is standard to perform a perturbative calculation in the nonlinearities of the theory. In the perturbative series, the renormalization of the parameters of the theory is given by the summation over the 1-PI Feynman diagrams of the theory times a dilatation coefficient which depends on their canonical dimensions.

#### Renormalization flow and fixed points

We are interested in the large scale behavior of the system. For technical and intuitive reasons, it is much more convenient to derive evolution equations of the parameters with respect to the scale than to calculate the integrals produced by the previous calculations for large values of the dilatation coefficient  $b$ . The derivation of the previous integrals with respect to the variable  $l = \ln b$  leads to a system of coupled nonlinear differential equations, which forms a first order autonomous differential system in terms of the variable  $l = \ln b^1$ . These equations are called the “renormalization group equations” of the theory, or simply the “flow equations”. On a flow line are located sets of parameters which describe the same system at different scales. The transition is given by the fixed point of the renormalization group, or more generally by the “critical surface”, made of the sets of parameters which flow towards the fixed point under renormalization. The asymptotic behaviors of the theory depend only on the properties of the fixed point, and therefore are universal. The critical exponents are associated with the eigen values of the linearized flow equations around the fixed point. In the case of the Hopf bifurcation, there is only one relevant direction of the flow equations, associated with the control parameter of the bifurcation.

---

<sup>1</sup>Autonomous means where  $l = \ln b$  does not appear explicitly.



## Renormalization conditions and anomalous dimensions

The definition of the renormalized action  $\mathcal{S}^R[\tilde{\psi}^R, \psi^R]$  lets us degrees of freedom, and therefore the renormalized theory is multi-valuated. The usual technique to solve the problem consists in fixing the value of certain parameters under renormalization. This leads to a renormalization of fields and time units. One important point should be underlined here : in this thesis, we choose to fix the value of the coefficient  $D$  (associated with the amplitude of the noise) under renormalization, and to renormalize the units of time (See subsection 4.3.5 for a detailed discussion concerning this choice).

### 4.1.2 Renormalized parameters and self-consistence of the theory

#### Symmetries

Symmetry arguments give us restrictions on the parameters which can be changed or appear under renormalization. We will detail that in the particular framework of our theory in subsection 4.2.2.

#### Canonical dimensions

We have to settle which are the coefficients which will be fixed under renormalization. To do that, we have three degrees of freedom. By continuity with the Gaussian theory, the parameters of the theory settled under renormalization will be chosen to be  $c$ ,  $D$  and the coefficient which appears in front of  $-\tilde{\psi}_\alpha \partial_t \psi_\alpha$  in the action (2.19)<sup>2</sup>. The canonical dimensions of the different mathematical quantities of the theory are given in equation (4.5).

#### Irrelevant parameters

Irrelevant parameters go towards zero under renormalization by dimensional analysis. Usually, this property is taken as an argument sufficient to forget about them in the elaboration of the renormalization group equations of a given field theory. But their presence leads to new renormalizations of some of the relevant parameters, and the global effect is not obvious. However, one can prove that their presence should not change the critical asymptotic behaviors, and we will then ignore them in our study [91, 11]. A detailed discussion of their role can be found for example in [2].

### 4.1.3 Critical behavior in space dimensions larger than 4

Here we justify, as promised in chapter 3, and with an argument of stability of the Gaussian fixed point, that mean field theory is valid in space dimensions larger than 4. The argument is similar to the standard argument used in  $\phi^4$  theory.

---

<sup>2</sup>This coefficient will be labeled  $\lambda$  in the following and kept equal to 1 under renormalization.

## 4.2 Renormalization of coupled oscillators in Wilson's scheme

In this section we present the specificities of the Wilson's renormalization scheme adapted to the complex Ginzburg-Landau field theory of coupled oscillators.

### 4.2.1 Canonical dimensions

The canonical dimensions of the quantities which appear in the theory are given by (4.5).

### 4.2.2 Symmetries

Symmetry properties of the  $\Gamma$  derivatives insure us that our theory is self-consistent. With these arguments, we show that the only relevant parameters which can appear under renormalization are already present in the action of the theory (subsection 2.3.2) (or in the dynamic equation (2.1)). Indeed, the only terms for which we have to consider the renormalization are  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4)}$ ,  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2)}$  and  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1}^{(2)}$  (for the notations, see appendix A and formula (2.34) ; see also subsection 4.5.3).  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4)}$  and  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2)}$  have a superficial degree of divergence equal to zero, and only their constant term has to be considered.  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1}^{(2)}$  has a superficial degree of divergence equal to two, and its linear terms in  $i\omega$  and  $\mathbf{q}^2$  have to be considered as well. All these terms are already present in the original action, except the linear coefficient of  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1}^{(2)}$  in  $i\omega$ , whose original nondiagonal part is zero and whose diagonal part is equal to 1. These two factors could be changed by renormalization. We have therefore to absorb them in a redefinition of the fields : the nondiagonal part will be absorbed in a new type of renormalization, corresponding to a redefinition of the relative phase between the two fields  $\psi_\alpha$  and  $\tilde{\psi}_\alpha$  (subsection 4.2.3), and then the amplitude will be absorbed by a standard renormalization of the amplitudes of the fields.

The essential difference with the usual way of renormalizing critical dynamic theories is that we choose to keep the coefficient  $D$  constant under renormalization and to renormalize in a non-trivial way the units of time in the problem. This important point is discussed in more details in the subsection 4.3.5.

### 4.2.3 Phase renormalization

The renormalization of the phase, which is specific to the complex Ginzburg-Landau theory, can be seen as a generalization of the renormalization of the amplitude of the fields to complex numbers. As in the case of  $Z$ -factors, defined usually to renormalize the amplitudes of the fields, we define an effective parameter  $\theta(l = \ln b)$  (see Eq. (4.7) and (4.16)), which aims to absorb the relative phase between the fields  $\psi_\alpha$  and  $\tilde{\psi}_\alpha$ , and which is generated by renormalization. This phase factor is directly related, through the response function, to the relative phase between the external forcing and the velocity of the mechanical

oscillators. Since this parameter is then eliminated during the renormalization procedure, its evolution is given by a differential equation which decouples from the renormalization group equations of the theory. The solution of this equation, after solving the renormalization group equations, is just given by a primitive calculation. At the fixed point, the derivative of  $\theta$  with respect to  $l = \ln b$  is constant, and  $\theta(l)$  is linear in  $l$ . We will discuss this *a priori* surprising result in chapter 7, section 7.2.

#### 4.2.4 Renormalization group equations

In this section, we establish in details the renormalization group structure of the theory by using the physical ideas presented previously.

##### Infinitesimal renormalization of the parameters

We start from a theory, defined microscopically by the action  $\mathcal{S}^{(0)}$  at the scale  $\Lambda$ , and we define a renormalized theory at the scale  $\Lambda/b$  (Eq. (4.9)) in terms of effective quantities (Eq. (4.7)). We then perform a shell integration (Eq. (4.10)), and absorb the term  $i\delta\lambda_2$  appearing in (4.11) in a redefinition of the phase of the field  $\tilde{\psi}_\alpha$  (Eq. (4.12) and (4.14)). The initial variations of the parameters, which were given by the 1-PI Feynman diagrams of the theory, are affected by this transformation (Eq. (4.15)). We then perform a rescaling of the different quantities according to their canonical dimensions (Eq. (4.16)). The final expressions for an infinitesimal renormalization of the parameters is given by the system (4.17), to which should be added the decoupled expression (4.18). This last equation describes the evolution of the effective phase between the two fields  $\psi_\alpha$  and  $\tilde{\psi}_\alpha$  of the theory with respect to the scale parameter  $l = \ln b$ .

##### Renormalization group equations

We can now derive the renormalization group equations of the theory by differentiating the variations (4.17) with respect to the variable  $l = \ln b$ . The equation (4.19) illustrates the standard fact that this procedure leads to an autonomous differential system<sup>3</sup>. Indeed, the calculation being the same at each scale, the expressions (4.17) do not depend on  $l$ ; the condition  $\delta l = 0$  makes all variables disappear from the final expressions of the derivatives of the parameters.

By integrating these equations, one finds connections between the two-point functions of the theory described at different scales (Eq. (4.20) to (4.22)). In these equations,  $\Pi$  represents the original set of parameters, and  $\Pi'$  the set of renormalized parameters.

##### Fixed point of a nonoscillatory phase transition

It turns out that this method is inadequate in the sense that it leads to the fixed point of a nonoscillatory phase transition. Indeed,  $\omega_0$  is a relevant

---

<sup>3</sup>Where the variable  $l$  does not appear explicitly.

parameter of the theory, and should be taken equal to a particular value in order to settle the theory on the critical surface. In the original units of the theory, this effective value is zero. We notice that this is the same reason that imposes to  $\xi$ , the correlation length of the theory, to be equal to infinity at the fixed point (it could also be zero, value which corresponds to a physics of decoupled systems, and which does not correspond to a phase transition). Then this method leads us to an effective theory which has a zero frequency for the spontaneous oscillations at the transition. Therefore, an other more sophisticated technique needs to be developed in order to find the fixed point of an oscillatory transition. This is the purpose of the following section.

### 4.3 Renormalization of an oscillatory theory

#### 4.3.1 Elimination of the parameter $\omega_0$

We have learned in section 2.4 how to eliminate  $\omega_0$  from the theory. The fact that this elimination is possible without changing the structure of the theory constitutes a key point which allows us to define a renormalization group procedure which leads to an oscillatory phase transition. The idea here consists in performing the renormalization calculations for the theory related to the field  $U$  defined in section 2.4, which does not contain the parameter  $\omega_0$ , and then in going back to the correlation and response functions of the original theory using the equations (2.45) and (2.46). But the nondiagonal term of  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1}^{(2)}$  is not forbidden by symmetry and therefore is then recreated by renormalization. We must then, at each renormalization step, redefine the oscillation frequency of the renormalized fields, and follow the evolution of an effective parameter  $\omega_0(l)$ . Similar ideas as those presented in subsection 4.2.3 in the context of the definition of the effective phase  $\theta(l)$  are valid for the frequency.

#### 4.3.2 Renormalization group equations

##### Infinitesimal variations of the parameters

The calculations are similar to those presented in subsection 4.2.4. However, the elimination of the parameter  $\omega_0$  from the renormalization group equations leads to one more step in the definition of the renormalized fields.

We start from the definition of an effective theory (4.24), which is rotated from the original one by a relative phase factor between  $\varphi_\alpha$  and  $\tilde{\varphi}_\alpha$ , and placed in a rotating frame at the pulsation  $\hat{\omega}_0(b)^4$  (Eq. (4.23)). Then, as we did previously, we perform an infinitesimal renormalization of the quantities. We define a first intermediate action (4.26) which contains coefficients modified from the original ones by additional terms which are given by the 1-PI Feynman diagrams of the theory. We then define a first intermediate field by (4.27), in order to absorb the phase shift  $\delta\theta$  created by renormalization. This leads to a new expression

---

<sup>4</sup>This notation has been chosen to distinguish this effective pulsation, measured in terms of the renormalized units, with the final effective pulsation, labeled  $\omega_0(b)$ , and which will be measured in terms of the original units of the problem.

( $\delta\widehat{\omega}_0^{(1')}$ ) for the variation of the effective pulsation of the theory written in terms of this first intermediate field (Eq. (4.28)). Then, to absorb the term  $\delta\widehat{\omega}_0^{(1')}$  from the new effective action, we change the frame of the theory, defining the oscillating fields  $\varphi_\alpha^{(2)}$  and  $\widetilde{\varphi}_\alpha^{(2)}$  (Eq. (4.29)). Finally we rescale the unit of length and coherently the other quantities of the theory. The final variations of the different quantities are given by the equations (4.30) to (4.32). Since we have eliminated these parameters from the renormalization procedure, the effective phase and pulsation of the theory are given by two equations which decouple from the others (Eq. (4.33)).

### Renormalization group equations

To express the effective pulsation  $\omega_0(b)$ , we have to take into account the renormalization of the time units, which is made by the factor  $Z_\omega(b)$ . Finally, in the original units of the physical problem, the effective pulsation of the theory is given by the equation (4.34). The link between the two-point functions of the theory associated with the field  $\varphi_\alpha$ , which is used for the calculations and which never oscillates at the scale at which we consider the theory, and the two-point functions of the physical theory associated with the field  $\psi_\alpha$ , is given by the equations (4.35).

#### 4.3.3 Critical asymptotic behaviors

We have shown that we can eliminate the parameter  $\omega_0$  from the set of renormalized parameters and define a renormalization procedure associated to the oscillating frame in which the oscillatory transition is described by a fixed point of the renormalization group. Then, although its canonical dimension is positive, this parameter is effectively irrelevant, and whatever maybe its value, the theory exhibits a critical point and an associated second-order phase transition. The price we have to pay is that the renormalization group structure of the theory contains a scale-dependent oscillating frame transformation.

#### Definition of an effective theory in an oscillatory frame

In order to study the critical behavior, we define an effective theory, associated with a field  $\phi_\alpha$  (see Eq. (4.37)), which is written from the beginning in the oscillatory frame at a the effective frequency  $\omega_0(b)$ . This theory does not oscillate at this scale  $\Lambda/b$  and, since the microscopic and renormalized theories associated with this field  $\phi_\alpha$  are written in the same oscillating frame, the renormalization transformations for this theory do not include any rotations. We can therefore extract the critical asymptotic behaviors of this theory as we usually do in a  $\phi^4$  theory and then, combining the equations (4.39) and (4.38), go back to the critical behavior of the original theory we are interested in.

#### Critical exponents

At the fixed point of the renormalization group, the  $Z$ -factors, as functions of the dilatation coefficient  $b$ , are power laws. These power laws define three of

the four independent critical exponents of the theory. When we approach the critical surface, the linearized group equations give us the fourth independent exponent  $\nu$  as the inverse of the positive eigen value of the matrix of the linearized equations. Starting from these definitions for the four independent critical exponents  $\nu$ ,  $z$ ,  $\eta$  and  $\tilde{\eta}$ , we can extract all the critical asymptotic scaling laws (Eq. (4.41) to (4.43)). The equation (4.43) corresponds to the nonlinear response of the theory to an external stimulus at the criticality.

#### 4.3.4 Mean field critical exponents and critical behavior in $d > 4$

The comparison of these general scaling laws with the equations (3.23), (3.25) and (3.26) obtained in the framework of mean field theory allows us to deduce the critical exponents when the space dimension is larger than 4 (Eq. (4.44)).

#### 4.3.5 A new renormalization of the $O(2)$ model

In the case  $c_a = 0$  and  $u_a = 0$ , the renormalization structure of the complex Ginzburg-Landau theory in the rotational frame at the frequency  $\omega_0$  should correspond *exactly* to the renormalization group structure of the dynamic  $O(2)$  model. In particular,  $\omega_0(b)$  and  $\theta(b)$  should not flow, and the relation (2.55), related to the fluctuation-dissipation theorem, should take place to all order in perturbation theory.

The first property can be easily seen from the expressions of the paragraph 4.3.2. The second property is hidden in our formalism. It imposes the constraint (4.45) on the  $Z$ -factors of the theory, which corresponds also to the equations (4.46) and (4.47). In this case, only three of the four critical exponents defined above are independent, since the relation (4.48) takes place to all order in perturbation theory.

An other remark concerning our renormalization method should be underlined. In the  $O(2)$  model, it is natural to write the dynamics under the form (4.49), which contains structurally the fluctuation-dissipation relation. We see from this form that we can absorb the parameter  $D$  in a redefinition of the time; therefore, the way we choose to renormalize the theory, which consists in fixing  $D$  and renormalizing the time, is equivalent, in the case of the  $O(2)$  model, to the traditional way of renormalizing the theory, which consists in fixing the time and renormalizing  $D$ . In our case however, it is not natural to write the dynamics under the form  $\partial_t \psi_\alpha = DF_\alpha[\psi] + \eta_\alpha$ , which would be a generalization of (4.49). We then chose to renormalize the units of time, instead of renormalizing the parameter  $D$ , which corresponds to a more natural way of performing the renormalization. In the Callan-Symanzik equations we will present in section 4.5, this renormalization of the time gives us new terms in comparison with the  $\phi^4$  theory equations. Within this choice, the fixed point of the renormalization group of the theory will be defined as the point where *all* the functions which are in factor in front of the derivatives of the correlation functions with respect to parameters of the theory are zero. This is not the case when one chooses to renormalize  $D$ . Moreover, the renormalization of the units of time leads to the presence of derivatives with respect to frequencies in the

Callan-Symanzik equations, which are *directly* responsible for the scaling laws in time.

## 4.4 Callan-Symanzik renormalization scheme

This section presents some general features of the Callan-Symanzik's scheme.

We will see in conclusion of chapter 5, that the one-loop order calculation is insufficient to know qualitatively the complete structure of the renormalization group of the theory. As soon as we have more than one-loop integration in the Feynman diagrams, the shell integration becomes topologically complicated. Therefore, we need an other technique to perform the second order calculations.

The Callan-Symanzik's renormalization scheme starts from the same constatation as the Wilson's scheme, that the perturbative series of the theory diverges. The technique here consists in regularizing the theory in a  $4 - \varepsilon$  dimensional space and in defining a renormalized theory written in terms of new parameters, which are defined so that the perturbative series associated with this renormalized theory converges when  $\varepsilon$  goes to zero. The definition of the renormalized theory then depends on a scale parameter, labeled  $\mu$  (or  $\mu'$ , see subsection 4.5.4). The independence of the original theory with respect to this parameter leads to the Callan-Symanzik equations, which are partial derivative equations for the evolution of the correlation functions of the theory with respect to the scale.

In the following we use the "minimal renormalization scheme", where the "mass term" is treated separately, and where the "counterterms", related to the definition of the renormalized parameters, are defined such that they absorb exactly the poles in  $\varepsilon^{-1}$  of the integrals coming from the perturbative expansion. The BPHZ renormalization scheme (Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann [2, 91]), tells us that the primitive divergences corresponding to strict subgraphs of a given diagram are absorbed in the definition of the renormalized parameters to lower orders in perturbation theory. Therefore only the superficial degree of divergence of a given graph needs to be considered.

## 4.5 Renormalization of the theory of coupled oscillators in the Callan-Symanzik's scheme

Although it is technically different, the Callan-Symanzik's scheme of renormalization uses the same physical ideas and principles as the Wilson's scheme. The ideas which are specific to our model have been already explained in sections 4.2 and 4.3. We will just use them, without re-explaining them, to perform the renormalization of the theory of coupled oscillators in the Callan-Symanzik's scheme.

### 4.5.1 Bare theory

We label the bare theory with indexes <sup>(0)</sup>. It is given by the equations (4.50) to (4.52).

### 4.5.2 Elimination of the parameter $\omega_0$

Thanks to a transformation similar to (2.43), we define a new bare theory which does not contain the parameter  $\omega_0^{(0)}$ . The transformation consists in placing the theory in an oscillatory frame (Eq. (4.53)). Since in the Callan-Symanzik's scheme we treat the mass term separately, we split the action of the theory into three parts (Eq. (4.55) to (4.58)).

### 4.5.3 Superficial degree of divergence

We calculate the superficial degree of divergence of the different derivatives of the  $\Gamma$  functional.  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}$  indicates the eigen vertex with  $\tilde{N}$  external legs  $\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}$ ,  $N$  external legs  $\varphi_\alpha^{(0)}$  and  $L$  insertions of the operator  $[\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}\varphi_\alpha^{(0)}]$  in an expansion in powers of  $[r^{(0)}\tilde{\varphi}_\alpha^{(0)}\varphi_\alpha^{(0)}]$ . When the indexes are indicated,  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}$  will be labeled  $\Gamma^{(M, L)}$ , where  $M = \tilde{N} + N$ .

The eigen vertexes we have to renormalize are the following : the constant terms of  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_1\beta_2\beta_3}^{(4,0)}$ ,  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2}^{(2,0)}$  and  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,1)}$ , and the linear terms in  $i\omega$  and  $\mathbf{q}^2$  of  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,0)}$ .

### 4.5.4 Renormalized theory and counterterms

We first introduce the nondimensional coupling constants  $g^{(0)}$  and  $g_a^{(0)}$ . This brings a momentum scale parameter  $\mu$  (or  $\mu'$ ) in the theory<sup>5</sup>. The renormalized quantities are defined in (4.62), but the fields are still not the definitive renormalized ones. We then introduce a counterterm related to the absorption of the nondiagonal part of  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2,1)}$ , which appears as a rotation of the renormalized fields with the frequency  $\delta\omega_0$  (Eq. (4.63)). This term will be treated, as a mass term, separately. We will comment on this point in paragraph 7.1.2. The action is split into three parts : the proper action of the renormalized critical theory  $\mathcal{S}$ , the action which contains the counterterms  $\delta\mathcal{S}$ , and the action which contains the "mass" terms,  $\mathcal{S}_{per}$ .

Following the ideas of the paragraph 4.3.3, we define a theory which is located from the beginning in the oscillatory frame associated with the scale at which the renormalized theory is defined. The fields of this theory are labeled  $\phi_\alpha$  and  $\tilde{\phi}_\alpha$ . In particular, the renormalized theory associated with the field  $\phi_\alpha$  does not contain the parameter  $\omega_0$ . The associated Callan-Symanzik equations will then not contain any variation with respect to this parameter. The resolution of the Callan-Symanzik equation for this theory can then be performed in a similar way as the one known for a  $\phi^4$  theory. We then will have to go back to the physical theory. We will explain this procedure later in paragraph 7.1.2.

### 4.5.5 Callan-Symanzik equations

We label  $\Gamma[\phi]$  the eigen vertexes of the theory associated with the field  $\phi_\alpha$ . We have already justified that these functions do not depend on the parameter  $\omega_0$ . We label  $\Gamma^{(\tilde{N}, N, L)}[\phi](k_{\{i(j)\}}, \bar{k}_{\{l\}}; c, c_a, g, g_a, r, \mu')$  the eigen vertex associated

---

<sup>5</sup>  $\mu' = \mu\sqrt{4\pi}$  is introduced for purely technical reasons.



with the field  $\phi_\alpha$ , which contains  $L$  insertions of :

$$-rZ_r\sqrt{Z\tilde{Z}}Z_\omega\left[\tilde{\phi}_\alpha\phi_\alpha\cos\theta+\tilde{\phi}_\alpha\varepsilon_{\alpha\beta}\phi_\beta\sin\theta\right]$$

with the incoming impulsions  $\bar{k}_{\{l\}}$  (see the constructions of diagrams in chapter 6). The eigen vertexes depend on three different kinds of impulsions :  $k_{\{i\}}$ ,  $k_{\{j\}}$  and  $\bar{k}_{\{l\}}$ .  $i$  varies between 1 and  $\tilde{N}$ ,  $j$  between  $\tilde{N}+1$  and  $\tilde{N}+N$ , and  $l$  between 1 and  $L$ . The notation  $k_{\{i(j)\}}$  indicates all the impulsion sets  $\{k_{\{i\}}, k_{\{j\}}\}$ . The renormalized eigen vertexes  $\Gamma^{(\tilde{N}, N)}$ , which contain all the perturbative terms in a power series of the mass terms, are given by (4.70). (4.71) gives the link between the eigen vertexes of the bare and renormalized theories.

The vertexes contain always a factor  $(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(\sum_{i,j}k_{i(j)})$ , related to the translational invariance of the theory. We label  $\hat{\Gamma}$  the reduced functions after elimination of this factor. In terms of these reduced functions, the Callan-Symanzik equations of the theory associated with the field  $\phi_\alpha$  are given by (4.72), with the definitions (4.73).

An important point of these equation is that, for the critical theory (associated with a zero value of the parameter  $r$ ), we have three conditions to be at the fixed point of the renormalization group. The flow diagram of the critical theory is therefore given by three coupled nonlinear differential equations, which are written in terms of the three functions  $\beta$ ,  $\beta_a$  and  $\rho_{c_a}$ . Mathematically,  $\rho_{c_a}$  plays the same role as  $\beta$  and  $\beta_a$ . But because  $c_a$  is not a coupling constant, we label this function differently.

In the following, we express the different functions in terms of the poles of the  $Z$ -factors of the theory ; the index <sup>(1)</sup> indicates the pole of order 1 in  $\epsilon^{-1}$  (Eq. (4.77) and (4.79)). It is to notice that the equation (4.76) is easily solved thanks to the fact that we are interested only in the pole of order 1 in  $\epsilon^{-1}$  of the  $Z$ -factors.

#### 4.5.6 Solution of the Callan-Symanzik equations

We use the standard characteristics method [150] to solve the Callan-Symanzik equations. After a proper rescaling transformation given by the dimensional analysis (4.83), we get the solution (4.84) associated with the evolution equations (4.85), which describe the evolution of the renormalized parameters as functions of the scale dilatation coefficient  $s$ <sup>6</sup>.

#### 4.5.7 Fixed points and critical exponents

The fixed points of the theory are defined by the system (4.86). At this particular point, the solutions of the Callan-Symanzik equations take the form of scaling laws, which are given by (4.87) and (4.88). The comparison with the asymptotic critical behaviors (4.41) and (4.42) let us identify the critical exponents of the theory in this framework (Eq. (4.89)).

---

<sup>6</sup> $s$  is the parameter which enter the solution of the characteristics method. It is equivalent to the scale parameter  $\mu$ , since only the variations are important in the expression of the solution, and since  $\mu(s) = \mu \cdot s$ .

#### 4.5.8 Renormalization group structure when we keep $\omega_0$ in the set of renormalized parameters

In this section we just give the structure of the renormalization group of the theory when we keep  $\omega_0$  in the set of renormalized parameters. This parameter will be treated as a “mass” term, and therefore within a perturbation series. The main effect of this parameter, compared to the previous structure, is to give us a new term in the Callan-Symanzik equations of the theory. We therefore have here to define a new function  $\gamma_{\omega_0}(g, g_a, c_a, \varepsilon)$  describing the evolution of this parameter (see Eq. (4.98)), and the critical theory will be defined now by two conditions :  $r = 0$  and  $\omega_0 = 0$ . When these parameters are settled to zero, the critical theory defined here obeys *exactly* the same evolution equations as the previous one. These two structures are therefore consistent, and we recover the following fact, already established in the framework of the Wilson’s scheme : keeping the parameter  $\omega_0$  in the renormalization group equations leads to the critical point of a nonoscillatory phase transition, which corresponds to a very particular case of the general procedure presented previously.

In conclusion, we then have settled the whole structure of the renormalization group for the theory of coupled oscillators in the critical regime, which corresponds to the complex Ginzburg-Landau field theory. The structure has been established within Wilson’s as well as Callan-Symanzik’s schemes to all order in perturbation theory. In chapters 5 and 6, we will use these general structures for the practical calculations to the one- and two-loop orders in perturbation theory.

## Chapitre 5

# One-loop order perturbative calculations

In this chapter, we present the calculations to the one-loop order in perturbation theory in the Wilson's scheme. The method has been established to all order in perturbation theory in sections 4.2 and 4.3. The primitive variations of the coefficients appearing in the actions (4.11) and (4.26) are given by the "1-PI" Feynman diagrams of the theory, the integration over the impulsions being performed on the shell ( $q = |\mathbf{q}|$  varying between  $\Lambda/e^{\delta l}$  and  $\Lambda$ ). In this chapter,  $\Gamma^{(M)(1)}$  indicates the one-loop order in the perturbative development of  $\Gamma^{(M)}$ .  $M$  decomposes into  $M = \tilde{N} + N$ , and  $\tilde{N}$  and  $N$  are indicated by the presence of the indexes.

### 5.1 Infinitesimal renormalization of the parameters to the one-loop order

#### 5.1.1 Propagator renormalization

Let us consider firstly the renormalization of  $\Gamma^{(2)}$  to the one-loop order, denoted by  $\Gamma^{(2)(1)}$ . We cannot form any diagram for  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2}^{(2)(1)}$ , and therefore this parameter is not renormalized to this order in perturbation theory. The diagrams associated with  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)(1)}$  have been already calculated in chapter 3 in the equation (3.28). The result of the calculation of these diagrams is given by (5.1), which tells us that  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\beta}^{(2)(1)}$  is independent of the external momentum  $k$ . Therefore  $\delta D$ ,  $\delta\lambda_1$ ,  $\delta\lambda_2$ ,  $\delta c$  and  $\delta c_a$ , given by (5.2) and appearing in the intermediate actions (4.11) and (4.26), are zero to this order in perturbation theory. The results for the variation  $\delta r$  and  $\delta\omega_0$  are given by (5.3) for the method where we keep  $\omega_0$  in the set of renormalized parameters (and whose equations were presented in paragraph 4.2.4), and by (5.4) for the method where we eliminate  $\omega_0$  (and whose equations were presented in paragraph 4.3.2).

### 5.1.2 Vertex renormalization

We have justified in subsection 4.2.2 that, among the fourth derivatives of the functional  $\Gamma$ , we have only to consider  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}^{(4)}$ . To the one-loop order, it can be graphically represented by (5.5), where each diagram decomposes as (5.6), with the right symmetry factors<sup>1</sup>.

In the thesis we insist in the calculation of the symmetry factors. This is a technical point which does not need to be reproduced in full in this short English version. Then, with the conventions (5.12), we get the expressions (5.13) for the different topological classes of Feynman graphs of the theory. At a symmetry point (where  $k_2 = k_3 = k_4$ ),  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1\beta_2\beta_3\beta_4}^{(4)(1)}(k_1, k_2, k_2, k_2)$  possesses the symmetry (5.14). We give the argument of the demonstration in the proper thesis. Therefore only  $\Gamma_{\tilde{1111}}^{(4)(1)}(0, 0, 0, 0)$  and  $\Gamma_{\tilde{2111}}^{(4)(1)}(0, 0, 0, 0)$  have to be calculated, other terms being deduced by symmetry. For the final expression of the variations  $\delta u$  and  $\delta u_a$ , we get the results (5.18) within the method where we keep  $\omega_0$ , and (5.19) within the other method.

## 5.2 Renormalization group equations and fixed points structure of the theory

In this section, we present the results obtained after performing the one-loop order calculations. We essentially present the results obtained when we eliminate the parameter  $\omega_0$  from the set of renormalized parameters, since this is the well-suited technique to get the critical point of an oscillatory transition. However, we give briefly the equations obtained within the other method in order to check the consistence of the theory.

### 5.2.1 Renormalization group equations

Whereas the equation (5.21) is structurally imposed in our renormalization scheme, the equation (5.20) is the result of the one-loop order calculations for the parameters whose evolution is found to be trivial.

We define the reduced parameters (5.23). In terms of these reduced parameters, relabeled as the old ones, and in the method with elimination of  $\omega_0$ , we get the renormalization group equations (5.24). To these equations, we have to add the decoupled evolution equation for the effective frequency (5.25). This last equation should be integrated with the initial conditions given just below.

### 5.2.2 Fixed points and linearization

The equation (5.26) corresponds to the linearized renormalization group equation around the Gaussian fixed point, which describes the transition in dimension larger than four. The interesting fixed point is given by the values (5.27) and the linearized equations (5.28). The value of the parameter  $\bar{c}_a$ , which cannot be settled *a priori* in the theory, is found to be *arbitrary* at the fixed

---

<sup>1</sup>The  $\frac{1}{2}$  factor comes from the expansion of the exponential function.

point to the One-Loop order in perturbation theory. This fact is one of the main motivation to perform the calculations to the two-loop order.

In the remaining part of this subsection, we discuss our knowledge and the importance of the terms that we have neglected in the matrix (5.28). We notice that we can calculate, to this order in perturbation theory, the coefficients  $a_1$  and  $a_2$ , whose expressions are given by (5.30), even-though these terms are coefficients of second-order terms in  $\varepsilon$ .

### 5.2.3 Flow diagram and critical exponents

The flow diagram of the renormalization group of the theory is a 3 dimensional diagram. We plot its projection in the  $(u, r)$  plane in figure 5.1. Three of the four independent critical exponents are not renormalized to the one-loop order (Eq. (5.31)), and  $\nu$  is given by (5.32). As the value of  $\nu$  does not depend on the value of  $c_a$  at the fixed point, it should be the same as the value corresponding to the  $O(2)$  dynamic model. Indeed, one particular case of the complex Ginzburg-Landau theory corresponds to the  $O(2)$  dynamic model, and for  $c_a = 0$  and  $u_a = 0$  we should find a fixed point with the critical exponents of this equilibrium theory. It is actually the case.

### 5.2.4 Results obtained when we keep $\omega_0$

We present the results obtained with the method consisting in keeping the parameter  $\omega_0$  in the set of renormalized parameters. In this case, the evolution equation of  $\omega_0$  is coupled to those of the other parameters of the theory (Eq. (5.34)). Here we find, in addition to the Gaussian fixed point, *two* other fixed points. The first one corresponds to the expressions given after (5.34), and its linearized equations are given by (5.35). When  $\omega_0$  is settled to its fixed point value, we obtain exactly the same equations as in the previous case, and this shows the consistency of the two calculations. The other fixed point corresponds to an infinite value of the parameter  $\omega_0$ , which does not have any equivalent in the other method. Its existence can be related to the existence of the fixed point associated with an infinite temperature in a ferromagnet for example. Such a system is scale invariant, but does not show any phase transition. In our context, this fixed point is analogous of the fixed point of infinite value of the parameter  $r$  and does not have a clear physical meaning.

### 5.2.5 Insufficiency of the results and necessity of two-loop order calculations

We performed the one-loop order calculations within the Wilson's frame technique. We found that three of the four independent critical exponents of the theory are not renormalized to this order in perturbation theory. Moreover, the value of the parameter  $c_a$  is not fixed at the fixed point and the fixed points structure of the theory is qualitatively incorrect to this order. In particular, the ensemble of fixed points has one more dimension than what we could expect from the general structure.

Before performing the two-loop order calculations, we notice that, to the second order in perturbation theory, we need only to renormalize the propagator to get the first non-trivial corrections to all the different renormalized quantities of the theory. In particular, in order to get the qualitative structure of the fixed points and the first non-trivial corrections to all the different critical exponents of the theory, it is not necessary to renormalize the vertex to the two-loop order. This remark is precious in terms of the feasibility of the second-order calculations.

## Chapitre 6

# Two-loop order perturbative calculations

In this chapter we present the detailed calculations to the two-loop order in perturbation theory within the Callan-Symanzik's frame technique. We follow the principles settled in section 4.5. We present only the calculations in the framework of the method which eliminates the parameter  $\omega_0$  from the set of renormalized parameters. Indeed, we know that only this method can lead us to the fixed point of an oscillatory transition.

### 6.1 Perturbation theory and diagrammatic representation

#### 6.1.1 Graphical conventions

We present the graphical conventions for the representation of the different terms which appear in the actions (4.64) to (4.67) of the renormalized theory.

The propagators here do not contain the mass parameters (Eq. (6.1)). The interaction vertex is given by (6.2), and the counterterms of the action (4.66) are represented by the graphs (6.4) to (6.6). The mass terms, treated separately, are represented by (6.7).

#### 6.1.2 Diagrammatic expressions of the eigen vertexes

We present the graphical representations of the terms which appear in the first nontrivial corrections to the expressions of all the different eigen vertexes of the theory<sup>1</sup> that we have to renormalize. We label  $\Gamma_{\{\tilde{\alpha}_i, \beta_j\}}^{(\tilde{N}+N, L)(n)}$  the  $n$ -loop order perturbative term of  $\Gamma_{\{\tilde{\alpha}_i, \beta_j\}}^{(\tilde{N}+N, L)}$ , which is the derivative of the  $\Gamma$  functional with respect to  $\tilde{N}$  fields  $\tilde{\varphi}_{\alpha_i}$ ,  $N$  fields  $\varphi_{\beta_j}$ , and which contain  $L$  insertions of  $[\tilde{\varphi}_{\alpha} \varphi_{\alpha}]$ . From the results presented in paragraph 4.5.3, we have only to consider  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \beta_1 \beta_2 \beta_3}^{(4,0)(n)}$ ,  $\Gamma_{\tilde{\alpha} \beta}^{(2,1)(n)}$  and  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}_2}^{(2,0)(n)}$  for their constant term in an expansion in powers

---

<sup>1</sup>Derivatives of the  $\Gamma$  functional.

of  $i\omega$  and  $\mathbf{q}^2$ , and the linear terms in  $i\omega$  and  $\mathbf{q}^2$  of  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2,0)(n)}$  in a similar expansion. These last ones will be calculated by taking the first derivatives of  $\Gamma_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{(2,0)(n)}$  with respect to  $i\omega$  and  $\mathbf{q}^2$ .

To the one-loop order, we get the equation (6.8) with the decomposition (6.9), and a similar one for the counterterm. Each of these diagrams decomposes as (5.6), as we saw within the Wilson's frame technique. The second nontrivial development to the one-loop order corresponds to (6.10) with the decomposition (6.11).

The perturbative expansions to the second Loop order need to be considered only for the terms for which the renormalization was trivial to the One-Loop order. We present them in Eq. (6.12) to (6.15).

## 6.2 $Z$ -factor calculation

In this section, we present in details the calculation of the  $Z$ -factors of the theory to the first nontrivial order in perturbation theory, starting from the decompositions shown previously. As it is usually the case in the minimal scheme that we are using, because the diagrams are calculated for the “zero-mass” theory, or critical theory, we have to take care of the possible IR divergences. In order to do so, we will calculate the diagrams for a non-exceptional configuration of the external momenta :

$$\sum_{i \in I} \mathbf{q}_i \neq 0 \quad \forall I \quad (6.1)$$

and take the limit of zero momentum in the final result, after expansion in powers of  $\varepsilon$ .

### 6.2.1 Vertex renormalization

The calculations for the renormalization of the vertex is, at the beginning, similar to the calculation we did in the Wilson's frame technique (see subsection 5.1.2). The essential difference here is that we have to evaluate the integrals in a  $(4 - \varepsilon)$ -dimensional space, whereas in the shell-integration technique the integrals did not need to be calculated. We express the diagrams as functions of the elementary integrals  $I$  and  $J$  (Eq. (6.19) and (6.20)). The calculation of these integrals leads to (6.22), and we are interested only in the poles in  $\varepsilon^{-1}$  of these expressions. In terms of the reduced parameters (6.24), the  $Z$ -factors corresponding to the renormalization of the vertex to the first nontrivial order in perturbation theory are given by (6.23).

### 6.2.2 Renormalization of the mass and the frequency

The calculation of  $\Gamma^{(2,1)(1)}$  is similar, but not totally equivalent to the one performed previously for  $\Gamma^{(4,0)(1)}$ . Indeed, the topological classes of diagrams are different. The same strategy as the one used previously leads to the expressions (6.27).



### 6.2.3 Propagator renormalization

This section is entirely new compared to what we did within the Wilson's frame technique in chapter 5. We start with insisting on the calculations of the symmetry factors of the two-loop order diagrams of the theory, and get the expressions (6.32) for the different subclasses of diagrams. Then, after summation over the decompositions (6.13) and (6.15), we get the expressions (6.33) in terms of the integrals (6.34) and (6.35). The calculations lead to the expressions (6.37).

### 6.2.4 Formal calculations and complex integrals

We had to calculate the integrals  $H_{d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$ ,  $K_{1,d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  and  $K_{2,d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$ . These are integrals of complex rational fractions in terms of variables  $x_i$  which vary from 0 to 1, and which depend on the parameter  $\bar{c}_a$  (which appears only under the form  $i\bar{c}_a$ ).  $K_{1,d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  and  $K_{2,d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  are double integrals, and  $H_{d,\epsilon'\epsilon''}(\bar{c}_a)$  is a triple one. It is sufficient to evaluate them for  $d = 4$ , since the corrections in  $\epsilon$  will not appear in the poles in  $\epsilon^{-1}$  of the Feynman diagrams. The primitives of these rational fractions can be expressed in terms of the function  $\ln z$ ,  $z \in \mathbf{C}$ . Because calculations are heavy (and because finding primitive functions of complicated rational fractions is perfectly done by computers), we did them with the formal calculation software "Mathematica". This is the only step where we used software programs to perform the calculations.

One problem occurs in this procedure one problem occurs. Indeed, the complex function  $\ln z$ ,  $z \in \mathbf{C}$  cannot be defined on the entire complex plane without introducing a cut. Therefore we have, at each integration step, to move the cut so that the integration path never crosses it (otherwise the result given by Mathematica is wrong). But since the functions depend on the parameter  $\bar{c}_a$ , we should perform this operation differently for each value of  $\bar{c}_a$ , which means an infinite number of operations. The problem seems inextricable. The difficulty is removed by using the fact that the result can be expressed in terms of an analytic function of the parameter  $\bar{c}_a$ . A calculation in the vicinity of  $\bar{c}_a = 0$  is therefore sufficient to deduce the whole function by analytic prolongation. In this vicinity, one can move the cut of the function  $\ln z$ ,  $z \in \mathbf{C}$  in a uniquely defined way.

The price we have to pay is that the results can only be defined as analytic extensions of functions defined in the proximity of zero. For the integrals (6.37), we could find a simple analytic form defined for every value of the parameter  $\bar{c}_a$ . For the integral (6.38) however, such an expression cannot be found, and the result is expressed as the analytic prolongation to all real values of the parameter  $\bar{c}_a$  of the expression  $I_9$  given in appendix E.

### 6.2.5 Z-factors expressions

Finally the  $Z$ -factors of the theory are given, to the first nontrivial correction in perturbation theory, by the system (6.39) and the equations (6.23) and (6.27).



# Chapitre 7

## Results

In this chapter, we present all the results of the thesis work, which have been elaborated thanks to the structures and calculations established and performed in the previous chapters.

### 7.1 Expression and solution of the renormalization group equations

#### 7.1.1 Oscillating frame

The renormalization group equations for the complex Ginzburg-Landau field theory correspond to the Callan-Symanzik equations presented in subsection 4.5.5, and whose solution is given by (4.84) and the system (4.85) (written in terms of the reduced parameters (6.24)). This solution is expressed in terms of the theory associated with the field  $\phi_\alpha$  which is defined in (4.69), and whose correlation functions are labeled  $\Gamma[\phi]$ . This theory never oscillates at the scale at which it is considered, and does not contain any rotation in its renormalization transformations. In particular, the parameters  $\omega_0$  and  $\theta$  are absent from the renormalized theory, and do not appear in the related Callan-Symanzik equations. The way back to the original frame is described in subsection 7.1.2.

Using the results of the previous chapter, we can express all the functions which appear in the solution (4.84) of the Callan-Symanzik equations. We express these functions in terms of the reduced parameters (6.24). We give here the expressions obtained for the functions  $\beta$ ,  $\beta_a$  and  $\gamma_r$ . The expressions for the functions  $\rho_{c_a}$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_\omega$  and  $\tilde{\gamma}$  are heavy. We give them for  $\gamma$  and  $\rho_{c_a}$  in appendix E.  $\gamma_\omega$  and  $\tilde{\gamma}$  have similar expressions to  $\gamma$ . The evolution of parameters as functions of the scale are given by the set of equations (4.85).

#### 7.1.2 Physical theory

We have now to go back to the physical theory, which consists in the bare theory written in the original frame. Renormalized and bare theories differ only by multiplicative constants given by (4.71), and then obey the same differential equations. In particular they possess the same asymptotic behaviors. Returning to the original frame is not that simple, and is specific to the theory of coupled

oscillators. Indeed, we have to take into account the fact that the theory associated with the field  $\phi_\alpha$  has been rotated with a frequency, and affected by a phase factor, which depend on the scale at which the system is considered. The evolution of these frequency and phase are given by evolution equations similar to (4.85). Their evolution is described by the differential equations (7.4), written in terms of the functions defined in (7.3). We have to notice that, structurally in the theory, the renormalization of the frequency shift  $\delta\omega_0$  is proportional to the parameter  $r$ . It is therefore more convenient to eliminate this dependence from the definition of the function  $\gamma_{\omega_0}$ . The values chosen for the initial condition  $\delta\omega_0(s=1)$  and  $\delta\theta(s=1)$  are not important. Indeed, only scale-dependent variations of this parameters are physical observables, and not their absolute value.

We have also to remember that, before renormalization, we already did transformations, eliminating the original frequency and phase present in the system (see equation (2.2) and the elimination of  $\omega_0$  (4.53)). The original physical theory is given by the correlation functions  $\Gamma[\text{Phys}]$ , and their expressions are given by the equation (7.6) as a function of the correlation functions  $\Gamma[\phi]$  calculated previously. This equation constitutes the true solutions of the whole problem, including the oscillation and phase shift. The parameter  $\omega_0(s)$  is given by the expression (7.5) where  $\delta\omega_0(s)$  is given by the integration of (7.4), and  $\theta(s)$  by the integration of (7.4). The notation ‘‘Repr.Rot.’’ indicates the representation of a rotational operator on the  $\hat{\Gamma}$  functions, which are  $(\tilde{N} + N)$ -order tensors. The notation  $\hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}$  indicates the eigen vertex  $\Gamma^{(\tilde{N}, N)}$  after division by the factor  $(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(\sum_{i,j} k_{i(j)})$  (see subsection (4.5.5)).

In terms of the integrals (6.37), we get the expression (7.7) for the functions responsible for the evolution of the effective frequency and phase factors. The important following point should be underlined : to the one-loop order in perturbation theory, the evolution of the parameter  $\omega_0(s)$  is given by the integration of (7.8), which should be compared to the equation (5.25) obtained in the Wilson’s frame technique. These two equations look different. This difference is related to the fact that the Callan-Symanzik technique we used treats the mass terms (to which  $\omega_0$  belongs) perturbatively. Then, within this technique, we can only have access to the difference between  $\omega_0$  and its value at the fixed point when this difference is small. If we take the first order term of (5.25) in an expansion series in powers of the parameter  $r$ , we find exactly the same equation as (7.8), after noticing that  $(\ln s)$  here plays the role of  $(-l)$  in the Wilson’s frame technique. This observation insures that the different procedures we defined are consistent.

## 7.2 Flow diagram, fixed point and universality class

### 7.2.1 Flow diagram

The flow diagram of the theory involves the evolutions of the three parameters  $g$ ,  $g_a$  and  $c_a$ , which are given by (4.85) in terms of the reduced parameters (6.24). The fixed points of the theory are given by the system (4.86), which consist of three equations depending on three variables. We can show that it is self-consistent, to the first nontrivial correction to the different quantities, to

take the fixed point values obtained from the cancellation of the functions  $\beta$  and  $\beta_a$ , which are given by (7.9), and to report them into the equation (7.10). The fixed points of the theory are then given by one equation of one variable  $\bar{c}_a$ .

The graph of  $\rho_{c_a}(\bar{\alpha}^*(\bar{c}_a), \bar{\alpha}_a^*(\bar{c}_a), \bar{c}_a)$  (which defines the fixed points of the theory) as a function of  $\bar{c}_a$  is given Fig. 7.1.

### 7.2.2 Universality class and critical exponents

The result of our calculations is that the only solution of this equation is the fixed point  $\bar{c}_a^* = 0$ . We knew from the beginning that this point should be a fixed point of the present theory. Indeed, it corresponds to the fixed point of the dynamic  $O(2)$  model. We can now assert the following result : to the two-loop order in perturbation theory, the uniform oscillatory phase transition of a system infinitely extended in a  $(4 - \varepsilon)$ -dimensional space, homogeneous and isotropic, possesses, in the oscillatory frame at the frequency of the effective spontaneous oscillations at the transition, the same fixed point as the dynamic  $O(2)$  model. In particular, it possesses the same leading asymptotic scaling laws. The critical exponents are given by the equations (7.11) and (7.12).

We have to notice that the evolutions (7.4) are both zero at the fixed point. Therefore  $\omega_0$  and  $\theta$  are not renormalized at the fixed point. At this fixed point, they take effective values which are nonuniversal quantities. But their variations from their fixed point values, depending on the scale parameter, are universal quantities. We will see in section 7.3 how they influence the expression of the physical response function in the critical regime.

### 7.2.3 Peculiar limit in 4 dimensions and synchronization

The flow diagram of the theory is a 4-dimensional diagram. We represent here projections of this flow diagram in different planes. The projection in the  $(r, u)$  plane is not qualitatively changed with respect to what we got to the one-loop order, and which we presented in figure 5.1. The projections of the flow diagram in the  $(u, c_a)$  plane are presented in figures 7.2 and 7.3, respectively in space dimensions larger and lower than 4. The limit towards dimension 4 is peculiar, which is illustrated by the formula (7.14). In this formula, with well-chosen initial conditions,  $c_a^*$  can take any given value. In dimension larger than 4, the Gaussian fixed point is stable, and can be realized for any value  $c_a^*$  of the parameter  $c_a$ . The fixed point ensemble has one extra dimension compared with the case of a space dimension lower than 4.

We should notice also the important following point : without noise, the dynamics described by the complex Ginzburg-Landau equation is very complicated in the unstable region. For some values of the set of parameters, the dynamics is chaotic. Some works have shown that noise can synchronize oscillations [112, 148, 42]. The fact that the only stable fixed point of the associated statistical field theory corresponds to the fixed point of the dynamic  $O(2)$  model may constitute a general proof by renormalization group techniques of this aspect of the dynamics of coupled oscillators. Nevertheless, a study of the oscillatory region of the phase diagram by renormalization group techniques would

be necessary to possess a definitive assertion.

### 7.3 Response and correlation functions in the critical regime

We propose to give an effective expression for the linear response function of the theory in the critical regime. The path we follow in this section can be exactly reproduced for the correlation function. We choose to present in details the calculation of the response function, because it includes the effective phase factor  $\theta$  which represents physically a phase shift between external force and velocity (see section 2.1).

The matrix of the two-point correlators is given by the inverse of the matrix  $\underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^{(2)}$ , whose expression can be deduced from the general solution (7.6). To deduce the effective expressions of the correlations of the physical theory, we use the following thought process : the equation (7.6) allows us to connect the expressions for  $\underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^{(2)}$  at different scales. We start from a theory which describes a system operating close to the transition. We then choose a dilatation coefficient  $s$  sufficiently small so that the correlations in the right-handed term of (7.6) are associated with a set a parameters located far from the critical surface. Therefore, for this term, a classical perturbative expansion around mean field theory is allowed. At this point, for simplicity, we express  $\underline{\underline{\tilde{\Gamma}}}^{(2)}$  in terms of its expression obtained within the mean field approximation<sup>1</sup>. By integration of the renormalization group equations, we can express the functions we are interested in at the original scale. A calculation as precise as we wish could be performed. We use here the linearized group equations, which allow an analytical integration. The final result is expressed in terms of effective parameters, which form the physical observables.

#### 7.3.1 Oscillatory frame

We start with studying  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}[\phi]$ , which is the inverse of the response function in the oscillatory frame. We use the solution (7.15) of the Callan-Symanzik equations. For a particular value  $s^*$  of the dilatation coefficient  $s$ , chosen so that  $r^* = r(s^*)/s^*$  is sufficiently large, we use the mean field expression for the right-handed term of the equation (7.15). The resulting expression (7.16) is valid in the regime  $q\xi \ll 1$  and  $\omega\xi^z \ll 1$ . In this expression,  $\xi$  represents the correlation length of the problem and  $\xi_0$  another effective length which appears in the calculation.

The critical regime corresponds to a choice of the parameters of the theory such that  $q\xi \gg 1$  and  $\omega\xi^z \gg 1$ , but sufficiently small to allow us to neglect the influence of the irrelevant parameters and stay in the regime where we can write an effective field theory for the problem<sup>2</sup>. To deduce a similar expressions in the

---

<sup>1</sup>More precise calculations, using a one-loop expansion for example, are possible but would not involve any additional principles.

<sup>2</sup>Indeed, at very small scales, the discrete lattice on which the individual oscillators are located cannot be forgotten.

critical regime, we use the fixed point scaling behaviors (7.17).  $A_1$  and  $A_2$  can be expressed by continuity in  $q = \xi^{-1}$  (resp.  $\omega = \xi^{-z}$ ) with the previous expression. The main important point is that they do not depend on the correlation length  $\xi$ .

These results have been obtained for the diagonal part of  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}[\phi]$ . The non-diagonal part introduces a peculiar point. Indeed, the mean field expression for the nondiagonal part is proportional to the parameter  $c_a$ . The previous arguments rely on the fact that irrelevant parameters do not influence the effective expressions, since they vanish for very small values of the dilatation coefficient  $s$ . But if they appear multiplicatively, they do modify the scaling laws. In these terms,  $c_a$  is a “dangerous irrelevant parameter”.

### 7.3.2 Solution $c_a(s)$

Regarding the previous observation, we need to know the solution  $c_a(s)$ . In the following, we label  $\vec{g}$  and  $\vec{\beta}$  respectively the vectors  $(g, g_a, c_a)$  and  $(\beta, \beta_a, \rho_{c_a})$ <sup>3</sup>. The linearized renormalization group equations around the fixed point can be written in the form (7.18), whose solution is given by (7.19).  $\underline{\omega}$  is given by (7.20), and its eigen values by (7.21). These eigen values are universal quantities and  $\omega_2$  and  $\omega_3$  are specific universal quantities, associated with the linearized renormalization group equations of the theory in the complex directions of the set of parameters. We notice that we recover the two irrelevant eigen values obtained in the Wilson’s frame technique to the one-loop order calculations (see Eq. (5.28)); the other non-zero values are given by the two-loop order calculations of chapter 6. The solution  $c_a(s)$  is finally given by (7.22).

The nondiagonal part  $\widehat{\Gamma}_{12}^{(1,1)}[\phi]$  has then different scaling laws than the diagonal one (Eq. (7.23) and (7.24)). The  $\omega$  dependence at  $q = 0$  is, to this order, identically equal to zero.

Finally, we get for the complete response function associated with the field  $\phi_\alpha$ , given by the inverse matrix of  $\widehat{\Gamma}^{(1,1)}[\phi]$ , the following expressions : in the regime  $q\xi \ll 1$ ,  $\omega\xi^z \ll 1$ , we get the equation (7.25), and in the critical regime the equations (7.27) and (7.28). We have to notice that the new universal exponent  $\omega_3$  appears in this final result. We will see its impact in the whole physical response function in the following subsection.

### 7.3.3 Effective phase and frequency

To get the complete physical response function, we have to perform the complete renormalization group transformations which are given by the solution (7.6). We learned in chapter 2 how the representations of the rotational transformations which appear in this equation act on the two-point functions of the theory. If we are interested only in the proximity of the critical mode of pulsation  $\omega \simeq \omega_0$ , the physical response function  $\chi(\mathbf{q}, \omega)$  is given in terms of the function we have just calculated previously by the equations (7.29) and (7.30).

---

<sup>3</sup> $c_a$  plays mathematically a role similar to  $g$  and  $g_a$ , but we keep it mind that it does not physically represent a coupling constant.

As we said previously, the evolutions of  $\theta(s)$  and  $\omega_0(s)$  at the fixed point are trivial. The linearization of the evolution equations for these parameters around the fixed point give us corrections which are mathematically equivalent to the usual corrections to the scaling laws discussed in section 7.5. Physically however, they are different : indeed, they give a first correction to a constant value, as the usual corrections to scaling laws give a correction to an already existing asymptotic behavior. For this reason, it is much easier to access experimentally to the universal behavior of  $\theta(s)$  and  $\omega_0(s)$  around their critical value than to the usual corrections to scaling laws. These corrections are therefore much more important than the usual corrections to leading-order scaling laws.

If we go away from the critical surface, we get the dependence (7.31). The complete physical response function in the regime  $q\xi \ll 1$  and  $(\omega - \omega_0(\xi))\xi^z \ll 1$  is given by (7.32), with the expressions (7.31) and (7.33).  $\omega_0^{\text{eff}}$ ,  $\theta_{\text{eff}}$ ,  $\alpha_{\text{eff}}$ ,  $\beta_{\text{eff}}$ ,  $\rho_{\text{eff}}$ ,  $\sigma_{\text{eff}}$  and  $\delta_{\text{eff}}$  are nonuniversal effective parameters of the theory, as well as the effective parameters (7.34). When we go close to the critical surface,  $\xi$  diverges, and  $\omega_0(\xi)$  and  $\theta(\xi)$  go towards their fixed point values.

In the critical regime, we get the results (7.35) with the expressions (7.36). We see that the first corrections to the constant value  $\theta_{\text{eff}}$  of  $\theta$  correspond to scaling laws which involve the new universal quantities  $\omega_2$  and  $\omega_3$ . In equation (7.35), these exponents appear only as corrections to leading-order scaling laws which are given by the exponents  $z$ ,  $\eta$  and  $\tilde{\eta}$ .

## 7.4 Creation and breaking of the generalized fluctuation-dissipation relation

The fixed point of the theory is, in the effective oscillating frame, the fixed point of the dynamic  $O(2)$  model. Therefore, when we are exactly at the fixed point of the theory, the generalized fluctuation-dissipation relation (2.58) takes place. At the transition, this relation, which never exists otherwise in the theory, is asymptotically created. This relation is based on a particular symmetry of the theory (see subsection 2.4.3) which is never satisfied except from the particular case of the fixed point theory. This fact constitutes a “dynamic restoration of symmetry”. This phenomenon has been already observed in the past. It is for example the case for the  $O(n)$  model, whose fixed point is stable against several kinds of perturbations [87, 107, 10, 133, 134, 122]. However, in these models, the equilibrium dynamics constitutes always the foundation of the model. Although new universality classes may be obtained by breaking the detailed balance conditions on the noise correlators [131], they are most of the time obtained only in theories which are intrinsically out of equilibrium (cf KPZ and reaction-diffusion models which are mentioned in the first chapter of the thesis). The surprise in our case comes from the fact that, even-though our dynamics is intrinsically out of equilibrium, we recover the universality class of an equilibrium dynamic field theory at the transition with an effective generalized fluctuation-dissipation relation.

We can now characterize how this generalized relation is broken when we go away from the fixed point theory. Firstly, the usual fluctuation-dissipation



relation is broken through the presence of the effective frequency  $\omega_0$  and phase  $\theta$ , which in particular lead to a divergent effective temperature (see for example [99]). Moreover, even in the scale-dependent oscillating frame, this relation is broken when we go away from the fixed point. We can characterize this breaking in terms of the theory associated with the field  $\phi_\alpha$ , for which the generalized relation is given by (7.37). We define the quantity  $F(\mathbf{q}, \omega; c, \vec{g}, r, \mu')$  which characterizes the breaking of (7.37), and for which we can write a Callan-Symanzik type evolution equation (Eq. (7.39)). The relation is satisfied when  $F(\mathbf{q}, \omega; c, \vec{g}, r, \mu')$  is equal to 1, which is the case when we are exactly at the fixed point. We notice that the quantity  $\gamma_\omega + \frac{1}{2}(\gamma - \tilde{\gamma})$ , which appears in the equation (7.39), is equal to zero at the fixed point. We can study the behavior of this quantity  $F(\mathbf{q}, \omega; c, \vec{g}, r, \mu')$  with exactly the same concepts and techniques as the ones we used to study the response function in section 7.3.

## 7.5 Corrections to scaling laws

In this section, we derive expressions for the first corrections to leading-order scaling laws. With ideas similar to those used in the previous section, and following the discussion presented in [2], we define a quantity  $C^{(N,P)}(\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}, r, \mu')$  by the equation (7.41). This quantity characterizes the breaking of the leading-order scaling laws. We can write a Callan-Symanzik type equation for its evolution with respect to the scale parameter  $\mu'$ , and integrate it with the usual characteristics method to get the solution (7.43). Using the linearized renormalization group equations we get, sufficiently close to the fixed point, the final expression (7.45). In this equation,  $\hat{\Gamma}^{(\tilde{N}, N)}[\phi](\mathbf{q}_{i(j)}, \omega_{i(j)}; c, \vec{g}^*, r, \mu')$  follows the critical asymptotic scaling laws (4.87), and the eigen values (7.21) of the matrix  $\underline{\omega}$  give the next-to-leading order scaling behaviors.

We have to notice the following usual fact : other corrections, due for example to the presence of trivially irrelevant parameters<sup>4</sup>, can take place. But these corrections will be expressed in terms of power laws with exponent of order unity in the vicinity of 4 dimensions. Then, for small values of  $s$ , the exponents coming from the  $\underline{\omega}$  matrix, which are of order  $\varepsilon$  or  $\varepsilon^2$ , always dominate the next-to-leading order corrections (see for example [2]).

---

<sup>4</sup>Parameters which we did not take into account in our study.



# Conclusion ; Outlook

We have studied the critical behavior of coupled oscillators in the proximity of a continuous oscillatory homogeneous phase transition, or super-critical Hopf bifurcation. We have seen that, sufficiently close to the critical point, the dynamics of the system can be written in terms of a dynamic statistical out of equilibrium field theory, whose critical behavior can be investigated through perturbative renormalization group techniques. We have shown that this model exhibits a second-order phase transition with an associated critical point. In order to find the fixed point of an oscillatory phase transition, we had to perform the renormalization group transformations in an oscillating frame at an effective frequency and shifted with a phase factor which depend on the scale at which the system is considered. In this frame, the theory has, to the two-loop order in perturbation theory, the same fixed point as the  $O(2)$  model. A generalized fluctuation-dissipation relation is dynamically recovered at the transition, and the leading-order scaling behaviors are given by the same critical exponents as in the case of the  $O(2)$  dynamic model, written in terms of the model  $A$  of the classification of Hohenberg and Halperin [61]. However, new universal quantities have been calculated, and give us, in particular, characterizations of the evolution of the effective phase and frequency of the oscillations when we approach the transition. The qualitative structure of the fixed points of the theory is very different in space dimensions larger or lower than 4. Finally, the existence of only one stable fixed point, corresponding to the  $O(2)$  model fixed point, could constitute a general proof of the effect of noise on the synchronization of coupled oscillators located close to an oscillatory instability.

Our results rise numerous other questions. Firstly, our calculations have been performed to the two-loop order in perturbation theory. From these calculations we can already conclude that, sufficiently close to 4 dimensions, the  $O(2)$  model fixed point describes the oscillatory transition of coupled oscillators. However, our study does not give us any information on the stability of this fixed point in lower dimensions, in particular in 3 dimensions. If the property remains valid independently of the dimension, a general argument, probably based on a hidden symmetry in the problem, should be possible to point out. Secondly, it could be interesting to study the behavior of the system when it approaches the transition from the oscillatory regime. As we have already mentioned, the naive mean field theory, corresponding to the deterministic complex Ginzburg-Landau equation, is highly nontrivial, leading in some regions of the phase diagram to chaotic behaviors. Regarding these observations, defining a reliable field theoretical model in this region may include new puzzling aspects. It could be also

interesting to study the vicinity of 2 space dimensions. We know from the study of static critical phenomena that, in this case, Ginzburg-Landau expansions do not allow for a good description of the critical properties of the effective theory, and that nonpolynomial actions have to be written [150, 2, 91]. In the case of a rotational symmetry for a  $n$ -components order parameter, the case  $n = 2$ , or  $XY$  model, is highly special, with a phase transition qualitatively different from the one which exists in the vicinity of 4 dimensions [89, 138]. A generalization of these models to the critical dynamics of coupled oscillators needs to be written. We know also that, in the case of  $O(n)$  dynamics with a conserved order parameter, new universality classes can be pointed out when the noise is chosen anisotropic [131]. A dynamical model for coupled oscillators with a conserved order parameter could give us new universality classes. Another class of models we could study consists of a dynamics written in terms of a vectorial complex field  $\vec{Z}$ , possessing the  $O(n)$  symmetry in the space of the vectorial components. The symmetry group for this theory would be  $O(n) \times U(1)$ . Finally, in the inner ear of mammals, the hair cells of the cochlea, which are possibly the individual critical oscillators responsible for the nonlinear behavior in the mechanical response of the basilar membrane to an external oscillatory stimulus, respond preferentially to characteristic different frequencies. A proper description of their coupling through the basilar membrane could be better represented by a field theory in which the parameter  $\omega_0$  would depend on the space position  $\mathbf{x}$ . In the framework of Quantum Field Theory, we know that imposing to a global symmetry to become locally true leads to the introduction of a new field, called “gauge field”, which appears in a “covariant derivative”, and which describes interactions. In this context, this thought process gives a general mechanism to construct Lagrangians for interacting gauge theories [150, 85]. In our context, with the presence of a parameter  $\omega_0(\mathbf{x})$ , the transformation consisting in eliminating the frequency from the action of the theory would become a local transformation. The presence of spatial derivatives in the dynamic equation of the theory would require the introduction of an other dynamic field, which would lead to a dynamics locally phase invariant and containing a covariant derivative. We could wonder whether this approach would lead us to a model which would be physically acceptable and mathematically founded. More generally, all the extensions we mentioned here are just suggested by our work ; the physical relevance as well as the mathematical validity of these extensions still need to be established.





Troisième partie

Annexes et bibliographie





# Annexe A

## Notations

Dans cette annexe nous précisons les notations que nous utilisons dans le présent mémoire.

$d$  représente la dimension de l'espace sur lequel est définie notre théorie.

$\mathbf{x}$  ou  $\mathbf{y}$  représente une variable de position dans cet espace, et  $\mathbf{q}$  ou  $\mathbf{p}$  une impulsion. Un produit scalaire est noté  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  (resp.  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ ).  $x$  (resp.  $q$ ) représente la norme du vecteur  $\mathbf{x}$  (resp.  $\mathbf{q}$ ).

$t$  représente un temps, et  $\omega$  une fréquence.

Une intégrale sur l'espace-temps est notée :

$$\int d^d x dt$$

et une intégrale sur l'espace de Fourier spatio-temporel :

$$\int d^d q d\omega$$

Nous notons :

$$\int_{\mathbf{q}} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \quad ; \quad \int_{\omega} = \int \frac{d\omega}{2\pi}$$

$\delta$  représente la distribution de Dirac, et  $\delta^d$  la distribution de Dirac sur un espace de dimension  $d$ .  $\theta(t)$  représente la fonction créneau de Heaviside.

$k$  représente le vecteur  $(\mathbf{q}, \omega)$  ; nous notons :

$$\int_k = \int_{\mathbf{q}, \omega} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{2\pi}$$

et

$$\delta^{(d+1)}(k) = \delta^d(\mathbf{q})\delta(\omega)$$

Nos conventions pour les transformées de Fourier des fonctions définies sur l'espace et le temps sont les suivantes :

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{q}, \omega} f(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = \int_k f(k) e^{ik \cdot x}$$

$$f(k) = f(\mathbf{q}, \omega) = \int d^d x dt f(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

En particulier, nous notons de la même façon la fonction  $f$  et sa transformée de Fourier. L'espace dans lequel on considère la fonction étant précisé par les notations des variables.

$\Delta$  représente l'opérateur laplacien sur l'espace en dimension  $d$ .

$\psi_\alpha(\mathbf{x}, t)$  (resp.  $\psi_\alpha(k) = \psi_\alpha(\mathbf{q}, \omega)$ ) désigne la composante  $\alpha$  d'un champ vectoriel  $\psi_\alpha$  à deux composantes, évalué un point de coordonnées  $(\mathbf{x}, t)$  de l'espace direct (resp.  $(\mathbf{q}, \omega)$  de l'espace réciproque). Les indices  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent alors prendre les valeurs 1 et 2.

$\widetilde{M}_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')$  (resp.  $\widetilde{M}_{\alpha\beta}(k; k') = \widetilde{M}_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega; \mathbf{q}', \omega')$ ) désigne l'élément de matrice  $\alpha\beta$  d'une fonction matricielle à deux points  $\widetilde{M}_{\alpha\beta}$ , évaluée dans l'espace direct (resp. l'espace réciproque).

Il y a sommation implicite sur les indices répétés.

Nous désignons par  $\psi_\alpha$  le champ dynamique  $\psi$  en tant que fonction vectorielle à deux composantes définie sur l'espace-temps, les variables d'espace variant dans un espace de dimension  $d$ , et l'indice  $\alpha$  pouvant prendre les valeurs 1 et 2.

$\langle X \rangle$  désigne une moyenne statistique de la grandeur  $X$ .

Nous désignons par  $F[\psi_\alpha]$  une fonctionnelle du champ  $\psi_\alpha$ , c'est à dire une "fonction" dont les variables sont les champs vectoriel à deux composantes définis sur l'espace-temps.

Nous désignons par :

$$\int \mathcal{D}[\psi_\alpha] \mathcal{D}[-i\widetilde{\psi}_\alpha]$$

une intégrale fonctionnelle sur les champs  $\psi_\alpha$  et  $\widetilde{\psi}_\alpha$ , c'est à dire une intégrale sur toutes les valeurs que peuvent prendre les champs  $\psi_\alpha$  et  $\widetilde{\psi}_\alpha$  en chaque point de l'espace-temps, et pour chacune des valeurs de l'indice  $\alpha$ . Dans l'espace direct, l'intégrale fonctionnelle sur le champ  $\psi_\alpha$  se fait, en chaque point de l'espace-temps, sur les valeurs réelles, et l'intégrale fonctionnelle sur le champ  $\widetilde{\psi}_\alpha$  sur les valeurs imaginaires pures (voir l'appendice D). Une intégrale fonctionnelle peut être vue comme l'intégrale sur toutes les fonctions possibles de l'espace-temps, ou encore sur tous les "chemins" possibles. Elle donc aussi appelée "intégrale de

chemins”.

Les notations relatives aux graphes de Feynman sont précisées dans l’annexe C.

$\Gamma^{(\tilde{N},N)}$  désigne la dérivée fonctionnelle de  $\Gamma[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha]$  par rapport à  $\tilde{N}$  champs  $\tilde{\psi}$  et  $N$  champs  $\psi$ .  $\Gamma^{(\tilde{N},N)(p)}$  désigne le terme d’ordre  $p$  de  $\Gamma^{(\tilde{N},N)}$  en théorie des perturbations.

Lorsque les indices sont indiqués nous pouvons noter  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_i \beta_j}^{(n)} = \Gamma_{\tilde{\alpha}_1 \dots \tilde{\alpha}_{\tilde{N}} \beta_1 \dots \beta_N}^{(n)}$  (où  $n = \tilde{N} + N$ ,  $i$  varie entre 1 et  $\tilde{N}$  et  $j$  varie entre  $\tilde{N} + 1$  et  $\tilde{N} + N$ ) la dérivée fonctionnelle de  $\Gamma[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha]$  par rapport à  $\tilde{N}$  champs  $\tilde{\psi}$  et  $N$  champs  $\psi$ .

Enfin nous notons  $\Gamma_{\tilde{\alpha}_i \beta_j}^{(\tilde{N},N)}[\phi]$  les vertex propres associés à la théorie écrite en termes des champs  $\phi_\alpha$  et  $\tilde{\phi}_\alpha$ , située dans le référentiel oscillant à la fréquence effective des oscillations spontanées du système à l’échelle à laquelle on le considère (voir les équations (4.69) qui définissent les champs  $\phi_\alpha$  et  $\tilde{\phi}_\alpha$ ).



## Annexe B

# Corrélateur du bruit statistique près d'un point critique

Dans le paragraphe 1.2.2, nous avons insisté sur l'importance des fluctuations et le fait que cela pouvait être pris en compte dans les équations dynamiques, en couplant l'évolution des paramètres qui nous intéressent à un bruit statistique effectif. Nous n'avons en revanche rien dit de la distribution de probabilité qu'il nous fallait choisir pour ce bruit. Sa caractérisation est l'objet de cette annexe. Les arguments qui suivent sont communs à de nombreux modèles de dynamique critique.

Le bruit dont nous avons justifié la présence est dû aux fluctuations d'un très grand nombre de degrés de libertés. Dans l'esprit du théorème de la limite centrale, nous savons que la distribution de probabilité générique de telles variables aléatoires est une distribution gaussienne. C'est également cette distribution qui nécessite le moins d'hypothèses concernant les propriétés du bruit. Nous ferons donc ce choix et nous n'aurons alors à préciser que les deux premiers moments de la distribution. Le premier moment pouvant toujours être incorporé dans la partie déterministe de l'équation dynamique, celui-ci sera pris égal à zéro. Le système étudié étant homogène et invariant par translations, le deuxième moment du bruit prend la forme générale suivante :

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle = \phi(|t - t'|) \rho(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \quad (\text{B.1})$$

D'autre part, deux événements suffisamment séparés en temps ou en espace doivent être décorrélés, et ces fonctions doivent donc décroître suffisamment vite à l'infini. En particulier nous demanderons que ces fonctions soient intégrables. Dans la limite des grandes échelles temporelles et spatiales qui nous intéresse, on peut alors considérer que le bruit statistique décrivant les fluctuations est non corrélé, c'est à dire que les fonctions  $\phi$  et  $\rho$  sont des distributions  $\delta$  de Dirac. Dans le cadre des phénomènes critiques dynamiques, les divergences de la longueur de corrélation et du temps de corrélation fournissent une séparation naturelle des échelles entre les modes critiques et les autres degrés de liberté. Les transformations de groupe de renormalisation fournissent un cadre mathématique propre pour quantifier la convergence des corrélateurs du bruit

vers les distributions de Dirac<sup>1</sup>. Nous choisissons donc, au regard des arguments précédents, un bruit gaussien non corrélé, encore appelé “bruit blanc gaussien”.

---

<sup>1</sup>En particulier, dans le cadre de ces hypothèse, les corrélateurs tendent vers  $\delta$  au sens des distributions.

## Annexe C

# Théorie des perturbations et représentation graphique

Dans cette annexe nous nous proposons d'établir les règles du calcul perturbatif pour notre théorie dont nous avons besoin tout au long de notre étude. Pour cela, nous considérons la fonctionnelle génératrice de notre théorie en transformée de Fourier, qui est donnée par les équations (2.26) et (2.27). Le détail du calcul menant à cette expression est donné dans l'annexe D, où il est montré que cette écriture suppose la convention  $\theta(0) = 0$  pour la valeur en zéro de la fonction  $\theta$  de Heaviside. La partie gaussienne ou "libre"  $\mathcal{S}_0$  de l'action peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_0[\tilde{\psi}_\alpha, \psi_\alpha] &= \int d^d x dt \left\{ D\tilde{\psi}_\alpha \tilde{\psi}_\alpha - \tilde{\psi}_\alpha [\partial_t \psi_\alpha + R_{\alpha\beta} \psi_\beta] \right\} \\
 &= -\frac{1}{2} \int_{k,k'} \underline{\psi}^t(k) \underline{\tilde{A}}(-k, -k') \underline{\psi}(k') \\
 &= -\frac{1}{2} \int_k \underline{\psi}^t(k) \underline{A}(-k) \underline{\psi}(-k)
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

où :

$$\underline{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi} \\ \psi \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

et

$$\begin{aligned}
 \underline{\tilde{A}}(k, k') &= \underline{A}(k) (2\pi)^{d+1} \delta^{(d+1)}(k + k') \\
 \underline{A}_{\alpha\beta}(-k) &= \begin{pmatrix} -2D\delta_{\alpha\beta} & i\omega\delta_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}(-k) \\ -i\omega\delta_{\beta\alpha} + R_{\beta\alpha}(k) & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

Le propagateur de la théorie est donné par l'inverse de la matrice  $\underline{\tilde{A}}(x, x')$  dans l'espace direct. Cette matrice a la forme générale (2.25), et peut donc être écrite :

$$\underline{\tilde{C}}_{\alpha\beta}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\chi}_{\alpha\beta}^{0,+} \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta}^0 & \tilde{C}_{\alpha\beta}^0 \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

L'invariance par translations assure que cette matrice, tout comme la matrice  $\underline{\tilde{A}}$ , est proportionnelle à  $\delta^{(d+1)}(k+k')$  dans l'espace de Fourier. Nous pouvons donc écrire :

$$\underline{\tilde{C}}_{\alpha\beta}^0(k, k') = \underline{C}_{\alpha\beta}^0(k)(2\pi)^{d+1}\delta^{(d+1)}(k+k') \quad (\text{C.5})$$

et les équations qui s'en suivent pour les fonctions à deux points de la théorie libre  $\tilde{\chi}_{\alpha\beta}^0$  et  $\tilde{C}_{\alpha\beta}^0$ . Nous avons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \chi_{\alpha\beta}^0(k) &= \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -i\omega + R & \Omega_0 \\ -\Omega_0 & -i\omega + R \end{pmatrix} \\ C_{\alpha\beta}^0(k) &= C_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2D}{|\Delta|^2} \begin{pmatrix} \omega^2 + \Omega_0^2 + R^2 & 2i\omega\Omega_0 \\ -2i\omega\Omega_0 & \omega^2 + \Omega_0^2 + R^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

où

$$\begin{aligned} R &= r + c\mathbf{q}^2 \\ \Omega_0 &= \omega_0 + c_a\mathbf{q}^2 \\ \Delta &= (R - i\omega)^2 + \Omega_0^2 \end{aligned}$$

L'application du théorème de Wick permet de calculer perturbativement les fonctions de corrélation de la théorie (simples, connexes ou 1-particule irréductibles), en n'ayant à évaluer que des valeurs moyennes de fonctions à deux points prises avec un poids de probabilité gaussien [2, 91]. Ces valeurs moyennes élémentaires sont traditionnellement appelées "propagateurs libres" de la théorie. Nous pouvons représenter graphiquement les termes de la série perturbative sous forme diagrammatique. A chaque terme de cette série est associé un "diagramme de Feynman". La procédure générale de construction des diagrammes de Feynman est commune à de nombreuses théories. Aussi peut-elle être trouvée dans de nombreux ouvrages et nous ne la détaillons pas ici. Nous rappelons juste quelques règles de construction des termes de la série perturbative et de leur représentation, appelées "règles de Feynman", et qui sont spécifiques ou non à notre théorie. Nous souhaitons également rappeler que les séries perturbatives que nous calculons font intervenir des intégrales qui, en termes de diagrammes, seront représentées par des boucles. L'ordre que nous considérons en théorie des perturbations augmente linéairement avec le nombre de boucles dans les diagrammes. Aussi notre développement perturbatif est-il appelé "développement en nombre de boucles".

La représentation graphique est basée sur les principes suivants :

Un champ  $\psi$  est représenté par :



et un champ  $\tilde{\psi}$  par :





Les deux propagateurs libres dans l'espace de Fourier sont représentés par :

$$\frac{k}{\alpha \quad \beta} = \frac{k}{\alpha \quad \beta} = C_{\alpha\beta}(k) \quad (\text{C.7})$$

et

$$\frac{k}{\alpha \quad \beta} = \frac{k}{\alpha \quad \beta} = \chi_{\alpha\beta}(k) \quad (\text{C.8})$$

Finalement le vertex d'interaction est :

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1, k_1 & & \alpha_2, k_2 \\ & \diagdown & / \\ & \text{---} & \text{---} \\ & / & \diagdown \\ \alpha_3, k_3 & & \alpha_4, k_4 \end{array} = -U_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha_3\alpha_4} \quad (\text{C.9})$$

Les règles de Feynman pour la représentation diagrammatiques des différentes termes intervenant dans la série perturbative d'une fonction de corrélation de la théorie sont alors les suivantes :

- A chaque ligne d'un diagramme donné correspond un propagateur libre.
- Chaque propagateur contient un facteur  $(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k+k')$ .
- Chaque vertex contient un facteur  $(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(k_1+k_2+k_3+k_4)$ .

Après intégration sur les impulsions associées aux champs venant des termes d'interaction il reste :

- Une intégrale  $\int \frac{d^d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{d\omega}{(2\pi)}$  par boucle présente dans le diagramme.
- Un facteur  $-U_{\alpha\beta}\delta_{\rho\sigma}$  par vertex.
- Une dépendance générale dans les impulsions externes  $k_i^{ext}$  avec la contrainte  $(2\pi)^{d+1}\delta^{d+1}(\sum_i k_i^{ext})$ .

En pratique, l'expression des propagateurs reste simple si ils sont exprimés dans l'espace direct pour leur composante temporelle, et le calcul des intégrales liées aux boucles d'intégration est beaucoup plus aisé en termes dans cet espace. Il est donc utile d'exprimer les propagateurs libres de la théorie en termes des variables  $(\mathbf{q}, t)$ . Nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta}^0(\mathbf{q}, t-t') &= D \Omega_{\alpha\beta} [-\Omega_0(t-t')] \frac{e^{-R|t-t'|}}{R} \\ \chi_{\alpha\beta}^0(\mathbf{q}, t-t') &= \theta(t-t') \Omega_{\alpha\beta} [-\Omega_0(t-t')] e^{-R(t-t')} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

où  $\Omega_{\alpha\beta}(\theta)$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta$ . La causalité de la théorie se traduit à ce niveau par la présence du facteur  $\theta(t-t')$  dans l'expression du propagateur libre associé à la fonction de réponse. Nous montrons dans l'annexe D que, associée à la prescription  $\theta(0) = 0$ , cette propriété nous permet de mettre simplement en évidence la nullité de certains diagrammes de la théorie.

En particulier, nous retrouvons à l'aide d'un argument perturbatif les relations de causalité (2.22) et (2.40).

Enfin, comme pour une théorie  $\phi^4$  statique ou dynamique habituelle, les développements perturbatifs sous forme de diagrammes de Feynman sont donnés par les règles suivantes : les fonctions de corrélations sont données par la somme des diagrammes connectés de la théorie, les fonctions de corrélations connexes par la somme des diagrammes connexes et les vertex propres par la somme des diagrammes 1-particule irréductibles auxquels les propagateurs externes ont été retranchés. La démonstration de ce résultat, commune à toutes les théories qui ont une structure en  $\phi^4$ , peut-être trouvée dans de nombreux ouvrages (voir par exemple [150, 2, 91]). Les exemples de diagrammes importants pour notre étude sont donnés explicitement dans les chapitres 5 et 6.

## Annexe D

# Jacobien, $\theta(0)$ et causalité

Nous souhaitons dans cette annexe établir l'expression de l'intégrale fonctionnelle (2.18) à partir de l'équation dynamique (2.1). Nous savons que l'écriture d'une intégrale fonctionnelle n'a de sens que si nous précisons quelle est la discrétisation sous-jacente qui a permis son écriture, et si son évaluation est effectuée avec le même choix de discrétisation. Nous expliquons que différents choix de discrétisation mènent à des écritures différentes de l'intégrale fonctionnelle, et nous identifions le choix implicitement effectué dans l'écriture (2.18). L'ambiguïté liée au choix de discrétisation est intimement liée à l'ambiguïté de la valeur en zéro de la fonction  $\theta$  de Heaviside. En particulier, la version discrétisée de la dynamique ne définit une théorie causale que pour un choix particulier de cette valeur en accord avec la discrétisation. Nous montrons qu'à l'écriture (2.18) doit être associée la prescription  $\theta(0) = 0$  de façon à avoir une théorie causale. Ce résultat peut-être retrouvé par un calcul purement continu. En effet, l'établissement et l'évaluation de l'intégrale fonctionnelle (2.18) sont possibles directement avec une écriture temporellement continue de la dynamique. En revanche, la discrétisation spatiale ne peut jamais être oubliée, car les intégrales spatiales qui interviennent dans le calcul perturbatif contiennent des divergences. Toutefois, pour ce qui concerne l'étude du comportement critique de grande échelle du système, le choix de la discrétisation microscopique de la théorie n'importe pas, et les différentes théories discrètes associées à la dynamique (2.1) appartiennent à la même classe d'universalité. Cette idée permet, dans le cadre de la technique de Wilson que nous utilisons pour le calcul perturbatif à l'ordre d'une boucle, d'utiliser une théorie régularisée à l'aide d'une coupure dans l'espace des impulsions à la place d'un réseau spatial, ce qui mène à des calculs plus simples (voir section 4.1).

### Calcul discret

Considérons notre équation dynamique (2.1), et discrétisons le temps en intervalles de taille  $\tau$ . Dans une telle version discrétisée, la première dérivée temporelle du champ est naturellement évaluée entre les sites temporels, tandis que le champ lui-même est évalué sur les sites. Un choix doit donc être fait sur le poids affecté aux sites  $n$  et  $n + 1$  pour évaluer la dérivée entre ces sites. Ce choix peut-être représenté par la donnée d'un paramètre  $\mu$  compris entre 0 et 1.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{Z_{n+1} - Z_n}{\tau} &= \mu \left\{ -(r + i\omega_0)Z_n - (u + iu_a) |Z_n|^2 Z_n + (c + ic_a)\Delta Z_n \right\} + \\ &+ (1 - \mu) \left\{ -(r + i\omega_0)Z_{n+1} - (u + iu_a) |Z_{n+1}|^2 Z_{n+1} + (c + ic_a)\Delta Z_{n+1} \right\} + \\ &+ \eta_n \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

avec

$$Z_n = Z(t_n) \quad \text{et} \quad \eta_n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \eta(t) dt$$

et  $n$  variant entre plus et moins l'infini. Avec cette définition, le bruit discrétisé est encore un bruit blanc gaussien, et dans le cadre de la formulation matricielle que nous avons introduite dans la section 2.3, nous avons :

$$\langle \eta_{\alpha,n}(\mathbf{x}) \eta_{\beta,n'}(\mathbf{x}') \rangle = \frac{2D}{\tau} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{\alpha\beta} \delta_{nn'}$$

Son poids de probabilité est alors donné par :

$$\mathcal{W}[\eta_{\alpha,n}] = \exp \left\{ -\frac{\tau}{4D} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int d^d x \left[ \eta_{1,n}^2 + \eta_{2,n}^2 \right] \right\}$$

Le poids associé à une configuration du champ  $\psi_\alpha$  dans la fonction de partition est alors donné par :

$$\mathcal{P}(\psi_{\alpha,n}) = \mathcal{P}(\eta_{\alpha,n}) \cdot \left| \det \frac{\partial \eta_{\alpha,i-1}(\mathbf{x})}{\partial \psi_{\beta,j}(\mathbf{x}')} \right|$$

Le terme général de la matrice jacobienne apparaissant dans ce changement de variable est proportionnel à  $\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  dans une version continue en espace. Comme nous l'avons dit, nous avons toutefois besoin d'une régularisation spatiale pour évaluer l'intégrale fonctionnelle, et la méthode de Wilson choisit de la réaliser à l'aide d'une coupure dans les intégrales dans l'espace de Fourier. Dans ce cadre les termes de la matrice jacobienne sont, dans un calcul perturbatif, proportionnels à :

$$\delta_\Lambda^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int_{\mathbf{q}}^\Lambda e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (\text{D.2})$$

Après passage à la limite continue temporelle, le calcul du jacobien de changement de variable montre qu'il est proportionnel à :

$$\exp \left\{ (1 - \mu) \delta_\Lambda^d(\mathbf{0}) \int_k [U_{\alpha\alpha} \psi_\beta(k) \psi_\beta(-k) + 2\psi_\alpha(k) U_{\alpha\beta} \psi_\beta(-k)] \right\} \quad (\text{D.3})$$

Dans la technique de Wilson de renormalisation, la série perturbative menant au calcul de la variation des paramètres par renormalisation se fait sur une "couche" d'impulsions comprises entre  $\Lambda/b$  et  $\Lambda$  (voir section 4.1). Ces mêmes termes perturbatifs apparaîtront donc avec le facteur de proportionnalité :

$$\delta_{\Lambda/b,\Lambda}^d(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{q},q=\Lambda/b}^\Lambda e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{D.4})$$

Pour tous  $\Lambda_1 \leq \Lambda_2$ , nous avons la propriété de Chasles suivante :

$$\delta_{\Lambda_2}^d(\mathbf{x}) = \delta_{\Lambda_1}^d(\mathbf{x}) + \delta_{\Lambda_1, \Lambda_2}^d(\mathbf{x}) \quad (\text{D.5})$$

Nous pouvons aisément vérifier qu'avec ces définitions les règles usuelles de calcul avec les distribution  $\delta$  sans coupure restent valables avec coupure. Traité en perturbations, le facteur (D.3) lié au jacobien introduit de nouveaux termes perturbatifs. qui peuvent représentés par le vertex à deux points suivant :



et dont l'expression est :

$$2(1 - \mu)\delta_{\Lambda/b, \Lambda}^d(\mathbf{0}) [\delta_{\rho\sigma}U_{\alpha\alpha} + U_{\rho\sigma} + U_{\sigma\rho}] \quad (\text{D.6})$$

dans le schéma de renormalisation de Wilson. Les termes perturbatifs provenant du vertex d'interaction lorsqu'il est bouclé sur lui-même avec une patte  $\tilde{\psi}$  peuvent être représentés par :



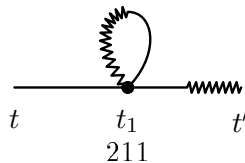
et contribuent pour :

$$-2\theta(0)\delta_{\Lambda/b, \Lambda}^d(\mathbf{0}) [\delta_{\rho\sigma}U_{\alpha\alpha} + U_{\rho\sigma} + U_{\rho\gamma}] \quad (\text{D.7})$$

Nous constatons donc que les ambiguïtés liées au choix de la discrétisation et à la définition de  $\theta(0)$  sont clairement liées : nous obtenons un résultat indépendant de la discrétisation si nous choisissons de définir :  $\theta(0) = 1 - \mu$ , ajouté d'un terme indépendant de  $\mu$ . Nous constatons que la discrétisation que nous avons implicitement choisie pour écrire l'intégrale de chemin (2.18), qui ne contient pas de terme associé au jacobien, correspond à  $\mu = 1$ . L'écriture que nous avons choisie doit donc être accompagnée de la prescription  $\theta(0) = 0$ .

## Causalité

Nous pouvons dériver autrement la valeur qu'il nous faut choisir pour  $\theta(0)$  en accord avec l'écriture(2.18) de l'intégrale de chemins de la théorie. Nous allons voir que la fait de demander à la théorie d'être causale nous impose  $\theta(0) = 0$ . Supposons en effet tout d'abord  $\theta(0)$  différent de zéro. Alors le diagramme :



contribue à la renormalisation de la fonction de réponse linéaire et n'est pas causal car  $t$  et  $t_1$  ne sont pas liés causalement.

Supposons maintenant avoir  $\theta(0) = 0$ . Considérons un diagramme contribuant à une fonction de corrélation connexe d'ordre quelconque. Considérons son vertex de plus grand temps  $\tau_m$ . Sa patte  $\tilde{\psi}$  ne peut pas être reliée à un autre vertex à cause de la fonction  $\theta$  présente dans le propagateur libre de la fonction de réponse. Comme elle ne peut pas non plus être reliée au vertex dont elle est issue, justement parce que nous avons choisi  $\theta(0) = 0$ , elle est obligatoirement reliée à une patte externe  $\psi$ . A ce  $\psi$  est associé un temps supérieur à  $\tau_m$ . Considérons maintenant une patte externe  $\tilde{\psi}$  quelconque. Le temps qui lui est associé est inférieur à celui du vertex auquel elle est reliée, lui-même inférieur à  $\tau_m$  par hypothèse. Ainsi le temps associé à ce  $\tilde{\psi}$  est-il inférieur à celui associé à la patte externe  $\psi$  qui est reliée au vertex de temps  $\tau_m$ . La patte externe de plus grand temps est bien toujours une patte  $\psi$ . Un raisonnement analogue sur les vertex propres permet de compléter l'établissement perturbatif des propriétés (2.22) et (2.40).

### Calcul continu

Comme nous l'avons dit, la version discrétisée de l'établissement de l'intégrale fonctionnelle (2.18) constitue le fondement théorique définissant le formalisme. Toutefois, comme nous allons le voir, les calculs peuvent être menés dans un formalisme continu en temps [150]. Nous pouvons donc faire le lien entre l'équation dynamique (2.1) et l'intégrale fonctionnelle sans passer par la version discrète, et sans avoir à préciser de discrétisation temporelle.

Partant des corrélateurs du bruit (2.14), nous pouvons écrire la fonction de partition suivante :

$$Z_\eta = \int \mathcal{D}[\eta_\alpha] \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int d^d x dt [\eta_1^2 + \eta_2^2] \right\} \quad (\text{D.8})$$

avec

$$\int \mathcal{D}[\eta_\alpha] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \prod_\alpha \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\tau}{4\pi D}} \int \mathcal{D}[\eta_{\alpha,n}(\mathbf{x})]$$

$$\eta_{\alpha,n} = \eta_n = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \eta(t) dt \quad \text{et} \quad t_n = n\tau$$

La fonction de partition  $Z_\psi$  associée au champ  $\psi$  s'écrit alors :

$$Z_\psi = \int \mathcal{D}[\psi_\alpha] \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \int d^d x dt [(\partial_t \psi_\alpha - F_\alpha[\psi])^2] \right\} |\det M| \quad (\text{D.9})$$

où  $M$  est la matrice jacobienne :

$$M_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \frac{\partial \eta_\alpha(\mathbf{x}, t)}{\partial \psi_\beta(\mathbf{x}', t')} \quad (\text{D.10})$$

et  $F_\alpha$  la fonctionnelle :

$$F_\alpha[\psi] = -R_{\alpha\beta} \psi_\beta - U_{\alpha\beta} \psi_\beta \psi_\gamma \psi_\gamma$$

La matrice  $M$  est proportionnelle à  $Id + N$  où

$$N_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = -\theta(t - t')\delta_{\Lambda}^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \frac{\partial F_{\alpha}[\psi](\mathbf{x}, t)}{\partial \psi_{\beta}(\mathbf{x}, t)}$$

Puisque  $Tr N^n$  est nul dès que  $n \geq 2$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \det M &= \exp Tr \ln M \propto \exp Tr N \\ &\propto \exp \left\{ \theta(0)\delta_{\Lambda}^d(\mathbf{0}) \int d^d x dt [U_{\alpha\alpha}\psi_{\beta}\psi_{\beta} + 2\psi_{\alpha}U_{\alpha\beta}\psi_{\beta}] \right\} \quad (D.11) \end{aligned}$$

Alors, sans spécifier aucune valeur pour  $\theta(0)$ , les contributions perturbatives liées à ce terme s'éliminent exactement avec les contributions du vertex propre (D.7). La théorie est alors automatiquement causale, et l'écriture (2.18), qui ignore le terme associé au jacobien, est valable si l'on impose  $\theta(0) = 0$ .

### Champ auxiliaire et fonctionnelle génératrice

Nous sommes donc convaincus que nous pouvons écrire la fonction de partition pour notre modèle sous la forme (D.9), avec une valeur 1 pour le facteur provenant de la matrice jacobienne, et la prescription  $\theta(0) = 0$ . Cette formulation est malheureusement inadaptée au calcul perturbatif des équations de groupe de renormalisation, et plus généralement au calcul perturbatif des fonctions de corrélation et de réponse de la théorie. Le formalisme de Janssen-De Dominicis, qui utilise l'introduction d'un champ dynamique auxiliaire  $\tilde{\psi}_{\alpha}$ , résout ce problème [101, 73, 26]. L'introduction de ce champ auxiliaire s'effectue en utilisant la formule :

$$e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tilde{x} e^{-\frac{1}{2}\sigma\tilde{x}^2 \pm \tilde{x}(ix)} \quad (D.12)$$

réécrite à l'aide de la variable  $\tilde{x} = i\tilde{x}$ . Il faut noter que l'intégration sur cette variable se fait alors sur l'axe imaginaire. Nous pouvons appliquer cette égalité en chaque point de l'espace-temps et pour chaque valeur de  $\alpha$  à notre fonction de partition (D.9), et nous obtenons la fonction de partition suivante :

$$Z_{\psi} = \int \mathcal{D}[\psi_{\alpha}] \mathcal{D}[-i\tilde{\psi}_{\alpha}] \exp \left\{ \int d^d x dt [D\tilde{\psi}_{\alpha}\tilde{\psi}_{\alpha} - \tilde{\psi}_{\alpha}(\partial_t\psi_{\alpha} - F_{\alpha}[\psi])] \right\} \quad (D.13)$$

La fonctionnelle génératrice (2.18) est obtenue en ajoutant les termes de couplage des champs  $\psi_{\alpha}$  et  $\tilde{\psi}_{\alpha}$  avec leurs champs conjugués respectifs  $J_{\alpha}$  et  $\tilde{J}_{\alpha}$ . Nous remarquons que le champ conjugué  $\tilde{J}_{\alpha}$  du champ auxiliaire  $\tilde{\psi}_{\alpha}$  joue le rôle d'une force externe dans l'équation dynamique, et a donc une signification physique précise. En revanche, le champ conjugué  $J_{\alpha}$  du champ  $\psi_{\alpha}$ , ainsi que le champ  $\tilde{\psi}_{\alpha}$ , n'ont aucune signification physique particulière, et ne représentent que des intermédiaires de calcul permettant de dériver, dans un cadre mathématique élégant, les fonctions de corrélation et de réponse de la théorie (voir les expressions (2.21)).

Nous remarquons également le fait suivant : après intégration de la variable de champ  $\tilde{\psi}_{\alpha}$  sur l'axe imaginaire, nous disposons d'une expression pour la

fonctionnelle génératrice ne comportant que des termes et des champs réels dans l'action (voir l'équation (3.1) du chapitre 3). Ainsi toutes les dérivées de cette fonctionnelle génératrice par rapport aux champs conjugués  $\tilde{J}_\alpha$  et  $J_\alpha$  sont des fonctions réelles des divers points de l'espace-temps, et les fonctions de corrélation et de réponse de la théorie dans l'espace direct sont bien des fonctions à valeurs réelles.



## Annexe E

# Expressions complètes de diverses quantités

Expression de l'intégrale  $I_9$  issue du calcul du paragraphe 6.2.4 :

$$\begin{aligned}
 I_9 = & \frac{1}{2(1+\bar{c}_a^2)} \left( (-1+i\bar{c}_a) \log [i(1+\bar{c}_a^2)] + (1-i\bar{c}_a) \log [2i(1+\bar{c}_a^2)] - \right. \\
 & - i(-i+\bar{c}_a) \log [i(1+\bar{c}_a(2i+\bar{c}_a))] + i\bar{c}_a \log [2i(1+\bar{c}_a(2i+\bar{c}_a))] + \log [8i(1+\bar{c}_a(2i+\bar{c}_a))] \left. \right) - \\
 & - \frac{1}{2(1+\bar{c}_a^2)} \left( 2i \arctan \left[ \frac{2\bar{c}_a}{3+\bar{c}_a^2} \right] + \log [9+10\bar{c}_a^2+\bar{c}_a^4] + 2 \log \left[ \frac{-i}{4} (1+\bar{c}_a(2i+\bar{c}_a)) \right] - \right. \\
 & \left. - 2 \log \left[ \frac{-i(1+\bar{c}_a(2i+\bar{c}_a))}{3+\bar{c}_a(2i+\bar{c}_a)} \right] \right) + \\
 & + \frac{1}{\sqrt{-(-i+\bar{c}_a)^2}} \left\{ \log \left[ -\frac{\sqrt{-(-i+\bar{c}_a)^2} (i+\bar{c}_a)}{\left(1+i\bar{c}_a+\sqrt{-(-i+\bar{c}_a)^2}\right)^2} \right] - \right. \\
 & \left. - \log \left[ \frac{\bar{c}_a - i\bar{c}_a^2 + i \left(-2 + \sqrt{-(-i+\bar{c}_a)^2}\right)}{2 + \sqrt{-(-i+\bar{c}_a)^2} + \bar{c}_a(i+\bar{c}_a)} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Expression de la fonction  $\gamma$  qui intervient dans les équations de groupe de renormalisation (4.72), et calculée à l'ordre de deux boucles en fonction des intégrales

calculées dans le paragraphe 6.2.4 :

$$\begin{aligned}
\gamma = & -\bar{\alpha} \left[ -24D^2 (4\bar{\alpha}_a \text{Im}(I_2) + 2\bar{\alpha} \text{Re}(2I_2 + I_4)) - \right. \\
& -3\bar{c}_a 8D^2 (2\bar{\alpha} \text{Im}(-2I_6 + I_8) + 4\bar{\alpha}_a \text{Re}(I_6)) + 8D^2 (4\bar{\alpha}_a \text{Im}(I_6) + 2\bar{\alpha} \text{Re}(2I_6 + I_8)) + \\
& \left. +16D^2 \bar{\alpha} \text{Re}(I_9) \right] - \\
& -\bar{\alpha}_a \left[ -24D^2 (4\bar{\alpha} \text{Im}(I_2) + 2\bar{\alpha}_a \text{Re}(-2I_2 + I_4)) - \right. \\
& -3\bar{c}_a 8D^2 (2\bar{\alpha}_a \text{Im}(2I_6 + I_8) + 4\bar{\alpha} \text{Re}(I_6)) + 8D^2 (4\bar{\alpha} \text{Im}(I_6) + 2\bar{\alpha}_a \text{Re}(-2I_6 + I_8)) + \\
& \left. +16D^2 \bar{\alpha}_a \text{Re}(I_9) \right]
\end{aligned}$$

Les fonctions  $\tilde{\gamma}$  et  $\gamma_\omega$  ont des expressions similaires.

Expression de la fonction  $\rho_{c_a}$  qui intervient dans les équations de groupe de renormalisation (4.72), et calculée à l'ordre de deux boucles en fonction de ces mêmes intégrales :

$$\begin{aligned}
\rho_{c_a} = & -\bar{\alpha}_a \left[ 8D^2 (2\bar{\alpha}_a \text{Im}(2I_2 + I_4) + 4\bar{\alpha} \text{Re}(I_2)) \right] - \bar{\alpha} \left[ 8D^2 (2\bar{\alpha} \text{Im}(-2I_2 + I_4) + 4\bar{\alpha}_a \text{Re}(I_2)) \right] + \\
& +\bar{\alpha}_a \bar{c}_a \left[ 8D^2 (4\bar{\alpha} \text{Im}(I_2) + 2\bar{\alpha}_a \text{Re}(-2I_2 + I_4)) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{\bar{c}_a} + \bar{c}_a \right) 8D^2 (2\bar{\alpha}_a \text{Im}(2I_6 + I_8) + 4\bar{\alpha} \text{Re}(I_6)) \right] + \\
& +\bar{c}_a \bar{\alpha} \left[ 8D^2 (4\bar{\alpha}_a \text{Im}(I_2) + 2\bar{\alpha} \text{Re}(2I_2 + I_4)) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{\bar{c}_a} + \bar{c}_a \right) 8D^2 (2\bar{\alpha} \text{Im}(-2I_6 + I_8) + 4\bar{\alpha}_a \text{Re}(I_6)) \right]
\end{aligned}$$

Expression de la solution linéarisée de la dépendance de la phase  $\theta$  en fonction de la dilatation d'échelle  $s$ , autour de sa valeur au point fixe du groupe de renormalisation :

$$\theta(s) = \theta_{\text{eff}} + 32D^2 (\bar{\alpha}^*)^2 \log \frac{4}{3} \left[ \frac{2s^{\omega_2}}{\omega_2} \left[ \frac{\bar{\alpha}_a}{\bar{\alpha}^*} - \bar{c}_a \right] + \frac{\bar{c}_a}{\omega_3} s^{\omega_3} \right]$$

Expression des quantités effectives qui interviennent dans l'expression de la fonction de réponse discutée dans la section 7.3, en fonction des paramètres du

modèle et de la longueur  $\xi_0$  qui apparaît dans l'expression (7.16) :

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_{\text{eff}} &= \xi_0^{-\frac{1}{2}(\eta+\tilde{\eta})} \\
\bar{c}_{\text{eff}} &= c \xi_0^{z-2-\frac{1}{2}(\eta+\tilde{\eta})} \\
\bar{\gamma}_{\text{eff}} &= c_a \xi_0^{z-2-\frac{1}{2}(\eta+\tilde{\eta})+\omega_3} \\
\alpha_{\text{eff}} &= 32D^2(\bar{\alpha}^*)^2 \log\left(\frac{4}{3}\right) \left[ \frac{1}{\omega_2} \left( \frac{\bar{\alpha}_a}{\bar{\alpha}^*} - \bar{c}_a \right) \right] \\
\beta_{\text{eff}} &= 32D^2(\bar{\alpha}^*)^2 \log\left(\frac{4}{3}\right) \frac{2\bar{c}_a}{\omega_3} \\
\delta_{\text{eff}} &= 8Dc_a \frac{\bar{\alpha}^*}{2-1/\nu} \\
\sigma_{\text{eff}} &= 8Dc \frac{\bar{\alpha}_a - \bar{\alpha}^* \bar{c}_a}{2-1/\nu + \omega_2} \\
\rho_{\text{eff}} &= -(\delta_{\text{eff}} + \sigma_{\text{eff}}) \tag{E.1}
\end{aligned}$$

Toutefois, seules les quantités effectives constituent des observables physiques mesurables expérimentalement, contrairement aux paramètres du modèle et à la longueur  $\xi_0$  qui ne sont que des intermédiaires de calcul.



# Bibliographie

- [1] B. Alberts, A. Johnson, J. Lewis, M. Raff, K. Roberts, and P. Walter. *Molecular biology of the cell*. Garland, New York, 2002.
- [2] D. J. Amit. *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena*. World Scientific, 1984.
- [3] I. S. Aranson and L. Kramer. The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Rev. Mod. Phys.*, 74(1) :99–143, February 2002.
- [4] R. D. Astumian. Thermodynamics and kinetics of a brownian motor. *Science*, 276 :917–922, May 1997.
- [5] K. E. Bassler and B. Schmittmann. Critical dynamics of nonconserved Ising-like systems. *Phys. Rev. Lett.*, 73(25) :3343–3346, December 1994.
- [6] R. Bausch, H. K. Janssen, and H. Wagner. Renormalized field theory of critical dynamics. *Z. Phys. B*, 24 :113–127, February 1976.
- [7] D. Bray. *Cell movements*. Garland, New York, 1992.
- [8] E. Brézin and C. De Dominicis. Field-theoretic techniques and critical dynamics. II. Ginzburg-Landau stochastic models with energy conservation. *Phys. Rev. B*, 12(11) :4954–4962, December 1975.
- [9] E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin. Wilson’s theory of critical phenomena and Callan-Symanzik equations in  $4 - \epsilon$  dimensions. *Phys. Rev. D*, 8(2) :434–440, July 1973.
- [10] E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin. Discussion of critical phenomena for general  $n$ -vector models. *Phys. Rev. B*, 10(3) :892–900, August 1974.
- [11] E. Brézin, J. C. Le Guillou, and J. Zinn-Justin. Field theoretical approach to critical phenomena. In C. Domb and M. S. Green, editors, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, volume vol. 6, pages 125–247. Academic Press, London, 1976.
- [12] S. Camalet. *Oscillations critiques de systèmes biologiques. Du battement ciliaire à la détection du son*. PhD thesis, Université Paris VI, March 2001.
- [13] S. Camalet, T. Duke, F. Jülicher, and J. Prost. Auditory sensitivity provided by self-tuned critical oscillations of hair cells. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 97(7) :3183–3188, March 2000.
- [14] S. Camalet, F. Jülicher, and J. Prost. Self-organized beating and swimming of internally driven filaments. *Phys. Rev. Lett.*, 82(7) :1590–1593, February 1999.

- 
- [15] L. Canet, B. Delamotte, and D. Mouhanna. Optimization of the derivative expansion in the nonperturbative renormalization group. *Phys. Rev. D*, 67 :065004(1)–065004(13), March 2003.
- [16] J. Cardy and U. C. Täuber. Theory of branching and annihilating random walks. *Phys. Rev. Lett.*, 77(23) :4780–4783, December 1996.
- [17] J. L. Cardy and R. L. Sugar. Directed percolation and Reggeon field theory. *J. Phys. A*, 13 :L423–L427, 1980.
- [18] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky. *Principles of condensed matter physics*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1995.
- [19] H. Chaté and P. Manneville. Phase diagram of the two-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. *Physica A*, 224 :348–368, 1996.
- [20] J.-F. Chauwin, A. Ajdari, and J. Prost. Force-free motion in asymmetric structures : a mechanism without diffusive steps. *Europhys. Lett.*, 27(6) :421–426, August 1994.
- [21] Y. Choe, M. O. Magnasco, and A. J. Hudspeth. A model for amplification of hair-bundle motion by cyclical binding of  $Ca^{2+}$  to mechanoelectrical-transduction channels. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 95 :15321–15326, December 1998.
- [22] C. A. Crawford and R. Fettiplace. The mechanical properties of ciliary bundles of turtle cochlear hair cells. *J. Physiol.*, 364 :359–379, January 1985.
- [23] M. C. Cross and P. C. Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65(3) :851–1123, July 1993.
- [24] P. Dallos. The active cochlea. *J. Neurosci.*, 12(12) :4575–4585, December 1992.
- [25] P. Dallos, A. N. Popper, and R. R. Fray, editors. *The Cochlea*. Springer, New York, 1996.
- [26] C. De Dominicis. Techniques de renormalisation de la théorie des champs et dynamique des phénomènes critiques. *J. Phys.*, 1(1) :C1–247, January 1976.
- [27] C. De Dominicis, E. Brézin, and J. Zinn-Justin. Field-theoretic techniques and critical dynamics. I. Ginzburg-Landau stochastic models without energy conservation. *Phys. Rev. B*, 12(11) :4945–4953, December 1975.
- [28] C. De Dominicis and L. Peliti. Field-theory renormalization and critical dynamics above  $T_C$  : Helium, antiferromagnets, and liquid-gas systems. *Phys. Rev. B*, 18(1) :353–376, July 1978.
- [29] H. L. de Vries. Brownian movement and hearing. *Physica*, 14(1) :48–60, January 1948.
- [30] R. J. Deissler. Noise-sustained structure, intermittency, and the Ginzburg-Landau equation. *J. Stat. Phys.*, 40(3/4) :371–395, 1985.
- [31] R. J. Deissler. Thermally sustained structure in convectively unstable systems. *Phys. Rev. E*, 49(1) :R31–R34, January 1994.

- [32] U. Deker and F. Haake. Fluctuation-dissipation theorems for classical processes. *Phys. Rev. A*, 11(6) :2043–2056, June 1975.
- [33] B. Delamotte. Nonperturbative (but approximate) method for solving differential equations and finding limit cycles. *Phys. Rev. Lett.*, 70(22) :3361–3364, May 1993.
- [34] C. Di Castro. Multiplicative renormalization group and critical behavior in  $d = 4 - \epsilon$  dimensions. *Lett. Nuovo Cimento*, 5(1) :69, 1972.
- [35] T. Duke and F. Jülicher. Active traveling wave in the cochlea. *Phys. Rev. Lett.*, 90(15) :158101(1)–158101(4), April 2003.
- [36] V. M. Eguíluz, M. Ospeck, Y. Choe, A. J. Hudspeth, and M. O. Magnasco. Essential nonlinearities in hearing. *Phys. Rev. Lett.*, 84(22) :5232–5235, May 2000.
- [37] R. A. Ferrell, N. Menyhárd, H. Schmidt, F. Schwabl, and P. Szépfalussy. Dispersion in second sound and anomalous heat conduction at the lambda point of liquid helium. *Phys. Rev. Lett.*, 18(21) :891–894, May 1967.
- [38] R. Fettiplace, A. J. Ricci, and C. M. Hackney. Clues to the cochlear amplifier from the turtle ear. *TRENDS in Neurosciences*, 24(3) :169–175, March 2001.
- [39] M. E. Fisher. The theory of equilibrium critical phenomena. *Rep. Prog. Phys.*, 30 :615–730, July 1967.
- [40] M. E. Fisher. The renormalization group in the theory of critical behavior. *Rev. Mod. Phys.*, 46(4) :597–616, October 1974.
- [41] M. E. Fisher. Renormalization group theory : Its basis and formulation in statistical physics. *Rev. Mod. Phys.*, 70(2) :653–681, April 1998.
- [42] J. A. Freund, L. Schimansky-Geier, and P. Hänggi. Frequency and phase synchronisation in stochastic systems. *Chaos*, 13(1) :225–238, March 2003.
- [43] E. Frey, U. C. Täuber, and T. Hwa. Mode-coupling and renormalization group results for the noisy Burgers equation. *Phys. Rev. E*, 53(5) :4424–4438, May 1996.
- [44] E. Frey and U. C. Täuber. Two-loop renormalization-group analysis of the Burgers-Kardar-Parisi-Zhang equation. *Phys. Rev. E*, 50(2) :1024–1045, August 1994.
- [45] E. Frey, U. C. Täuber, and F. Schwabl. Crossover from isotropic to directed percolation. *Phys. Rev. E*, 49(6) :5058–5072, June 1994.
- [46] H. Fujita and S. Ishiwata. Spontaneous oscillatory contraction without regulatory proteins in actin filament-reconstituted fibers. *Biophys. J.*, 75 :1439–1445, September 1998.
- [47] J. Garcia-Ojalvo and J. M. Sancho. *Noise in Spatially Extended Systems*. Springer, New York, 1999.
- [48] T. Gold. Hearing. II. The physical basis of the action of the cochlea. *Proc. R. Soc. London Ser. B*, 135 :492–498, 1948.

- 
- [49] Y. Y. Goldschmidt, H. Hinrichsen, M. J. Howard, and U. C. Täuber. Non-equilibrium critical behavior in unidirectionally coupled stochastic processes. *Phys. Rev. E*, 1999.
- [50] R. Graham. Hydrodynamic fluctuations near the convection instability. *Phys. Rev. A*, 10(5) :1762–1784, November 1974.
- [51] G. Grinstein, C. Jayaprakash, and Y. He. Statistical mechanics of probabilistic cellular automata. *Phys. Rev. Lett.*, 55(23) :2527–2530, December 1985.
- [52] A. W. Gummer, editor. *Biophysics of the Cochlea. From Molecules to Models*. World Scientific, 2002.
- [53] F. Haake, M. Lewenstein, and M. Wilkens. The irrelevance of detailed balance for the dynamical critical exponent. *Z. Phys. B*, 55 :211–218, 1984.
- [54] B. I. Halperin and P. C. Hohenberg. Scaling laws for dynamic critical phenomena. *Phys. Rev.*, 177(2) :952–971, January 1969.
- [55] B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, and S.-k. Ma. Calculation of dynamic critical properties using Wilson’s expansion methods. *Phys. Rev. Lett.*, 29(23) :1548–1551, December 1972.
- [56] B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, and S.-k. Ma. Renormalization-group methods for critical dynamics : I. recursion relations and effects of energy conservation. *Phys. Rev. B*, 10(1) :139–153, July 1974.
- [57] B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, and S.-k. Ma. Renormalization-group methods for critical dynamics : II. Detailed analysis of the relaxational models. *Phys. Rev. B*, 1976.
- [58] B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, and E. D. Siggia. Renormalization-group treatment of the critical dynamics of superfluid helium, the isotropic antiferromagnet, and the easy-plane ferromagnet. *Phys. Rev. B*, 13(3) :1299–1328, February 1976.
- [59] T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys. Rep.*, 254 :215–414, 1995.
- [60] H. Hinrichsen. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states. *Adv. Phys.*, 49(7) :815–958, June 2000.
- [61] P. C. Hohenberg and B. I. Halperin. Theory of dynamic critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 49(3) :435–479, July 1977.
- [62] P. C. Hohenberg and J. B. Swift. Effects of additive noise at the onset Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. A*, 46(8) :4773–4785, October 1992.
- [63] J. R. Holt and D. P. Corey. Two mechanisms for transducer adaptation in vertebrate hair cells. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 97(22) :11730–11735, October 2000.
- [64] J. Howard. Molecular motors : structural adaptations to cellular functions. *Nature (London)*, 389 :561–567, October 1997.



- 
- [65] J. Howard. *Mechanics of Motor Proteins and the Cytoskeleton*. Sinauer Associates, Inc., Sunderland, Massachusetts, 2001.
- [66] J. Howard and A.J. Hudspeth. Mechanical relaxation of the hair bundle mediates adaptation in mechano-electrical transduction by the bullfrog's saccular hair cell. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 84 :3064–3068, May 1987.
- [67] M. J. Howard and U. C. Täuber. ‘Real’ versus ‘imaginary’ noise in diffusion-limited reactions. *J. Phys. A*, 1997.
- [68] A. J. Hudspeth. How the ear’s work works. *Nature (London)*, 341 :397–404, 1989.
- [69] A. J. Hudspeth, Y. Choe, A. D. Mehta, and P. Martin. Putting ion channels to work : Mechano-electrical transduction, adaptation, and amplification by hair cells. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 97(22) :11765–11772, October 2000.
- [70] A. J. Hunt, F. Gittes, and J. Howard. The force exerted by a single kinesin molecule against a viscous load. *Biophys. J.*, 67 :766–781, 1994.
- [71] A. F. Huxley. Muscle structure and theories of contraction. *Prog. Biophys.*, 7 :255–318, 1957.
- [72] H. E. Huxley. The mechanism of muscular contraction. *Science*, 164 :1356–1376, June 1969.
- [73] H.-K. Janssen. On a Lagrangean for classical field dynamics and renormalization group calculations of dynamical critical properties. *Z. Phys. B*, 23 :377–380, January 1976.
- [74] H. K. Janssen. Spontaneous symmetry breaking in directed percolation with many colors : Differentiation of species in the Gribov process. *Phys. Rev. Lett.*, 78(15) :2890–2893, April 1997.
- [75] H.-K. Janssen. Directed percolation with colors and flavors. *J. Stat. Phys.*, 103(5/6) :801–839, 2001.
- [76] H. K. Janssen, U. C. Täuber, and E. Frey. Exact results for the Kardar-Parisi-Zhang equation with spatially correlated noise. *Eur. Phys. J. B*, 9 :491–511, 1999.
- [77] F. Jülicher. Mechanical oscillations at the cellular scale. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 2(Série IV) :849–860, 2001.
- [78] F. Jülicher, A. Ajdari, and J. Prost. Modeling molecular motors. *Rev. Mod. Phys.*, 69(4) :1269–1281, October 1997.
- [79] F. Jülicher and J. Prost. Cooperative molecular motors. *Phys. Rev. Lett.*, 75(13) :2618–2621, September 1995.
- [80] F. Jülicher and J. Prost. Spontaneous oscillations of collective molecular motors. *Phys. Rev. Lett.*, 78(23) :4510–4513, June 1997.
- [81] F. Jülicher, J. Prost, and P. Martin. Spontaneous oscillations and noise near a Hopf bifurcation : A description of hair-bundle oscillations. Unpublished.

- 
- [82] B. Kachar, M. Parakkal, M. Kurc, Y.-d. Zhao, and P. G. Gillespie. High-resolution structure of hair-cell tip links. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 97(24) :13336–13341, November 2000.
- [83] L. P. Kadanoff. Scaling laws for Ising models near  $T_c$ . *Physics*, 2 :263–272, 1966.
- [84] L. P. Kadanoff et al. Static phenomena near critical points : Theory and experiment. *Rev. Mod. Phys.*, 39(2) :395–431, April 1967.
- [85] M. Kaku. *Quantum Field Theory. A modern introduction*. Oxford University Press, Inc., New York, 1993.
- [86] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56(9) :889–892, March 1986.
- [87] I. J. Ketley and D. J. Wallace. A modified  $\epsilon$  expansion for a Hamiltonian with cubic point-group symmetry. *J. Phys. A*, 6 :1667–1678, November 1973.
- [88] J. B. Kogut. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. *Rev. Mod. Phys.*, 51(4) :659–713, October 1979.
- [89] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J. Phys. C*, 6 :1181–1203, 1973.
- [90] T. Kreis and R. Vale. *Cytoskeletal and Motor Proteins*. Oxford University Press, New York, 1993.
- [91] M. Le Bellac. *Des phénomènes critiques aux champs de jauge. Une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*. InterEditions/Editions du CNRS, July 1990.
- [92] S.-k. Ma. Introduction to the renormalization group. *Rev. Mod. Phys.*, 45(4) :589–614, October 1973.
- [93] S.-k. Ma. *Modern Theory of Critical Phenomena*. Perseus Publishing, 1976.
- [94] M. O. Magnasco. Forced thermal ratchets. *Phys. Rev. Lett.*, 71(10) :1477–1481, September 1993.
- [95] M. O. Magnasco. A wave traveling over a Hopf instability chapes the cochlear tuning curve. *Phys. Rev. Lett.*, 90(5) :058101(1)–058101(4), February 2003.
- [96] P. Manneville. Systèmes dynamiques et chaos. Unpublished ; available on <http://www.ladhyx.polytechnique.fr/people/pops/>.
- [97] P. Martin and A. J. Hudspeth. Active hair-bundle movements can amplify a hair cell’s response to oscillatory mechanical stimuli. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 96(25) :14306–14311, December 1999.
- [98] P. Martin and A. J. Hudspeth. Compressive nonlinearity in the hair bundle’s active response to mechanical stimulation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 98(25) :14386–14391, December 2001.
- [99] P. Martin, A. J. Hudspeth, and F. Jülicher. Comparison of a hair bundle’s spontaneous oscillations with its response to mechanical stimulation reveals the underlying active process. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 98(25) :14380–14385, December 2001.

- 
- [100] P. Martin, A. D. Mehta, and A. J. Hudspeth. Negative hair-bundle stiffness betrays a mechanism for mechanical amplification by the hair cell. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, 97(22) :12026–12031, October 2000.
- [101] P. C. Martin, E. D. Siggia, and H. A. Rose. Statistical dynamics of classical systems. *Phys. Rev. A*, 8(1) :423–437, July 1973.
- [102] K. Matsumoto and I. Tsuda. Noise-induced order. *J. Stat. Phys.*, 31 :87, 1983.
- [103] E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, and Y.-C. Zhang. Burgers equation with colored noise : Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth. *Phys. Rev. A*, 39(6) :3053–3075, March 1989.
- [104] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic Heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, 17(22) :1133–1307, November 1966.
- [105] C. Meunier and A. D. Verga. Noise and bifurcations. *J. Stat. Phys.*, 50(1/2) :345–375, 1988.
- [106] F. Moss and P. V. E. McClintock. *Theory of Continuous Fokker-Planck Systems*, volume 1 of *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1989.
- [107] T. Nattermann and S. Trimper. Critical behaviour and cubic anisotropy. *J. Phys. A*, 8(12) :2000–2017, 1975.
- [108] A. C. Newell and J. A. Whitehead. Review of the finite bandwidth concept. In H. H. E. Leipholtz, editor, *Instability of Continuous Systems*, page 284. Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [109] G. Ódor. Critical behavior of the one-dimensional annihilation-fission process  $2A \rightarrow \emptyset, 2A \rightarrow 3A$ . *Phys. Rev. E*, 62(3) :R3027–R3030, September 2000.
- [110] L. Onsager. Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65(3 and 4) :117–149, February 1944.
- [111] M. Ospeck, V. M. Eguíluz, and M. O. Magnasco. Evidence of a Hopf bifurcation in frog hair cells. *Biophys. J.*, 80 :2597–2607, June 2001.
- [112] A. Pikovsky. Statistics of trajectory separation in noisy dynamical systems. *Phys. Lett. A*, 165 :33–36, 1992.
- [113] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization-A Unified Approach to Nonlinear Science*. Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 2001.
- [114] J. W. S. Pringle. *Insect Flight Muscle*. North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [115] M. R. E. Proctor, S. M. Tobias, and E. Knobloch. Noise-sustained structures due to convective instability in finite domains. *Physica D*, 145 :191–206, 2000.
- [116] J. Prost, J.-F. Chauwin, L. Peliti, and A. Ajdari. Asymmetric pumping of particles. *Phys. Rev. Lett.*, 72(16) :2652–2655, April 1994.

- 
- [117] H. Risken. *The Fokker-Planck equation*. Springer-Verlag, 1984.
- [118] D. Riveline et al. Acting on actin : The electric motility assay. *Eur. Biophys. J.*, 27 :403–408, March 1998.
- [119] L. Robles and M. A. Ruggero. Mechanics of the mammalian cochlea. *Physiological Reviews*, 81(3) :1305–1352, July 2001.
- [120] V. G. Rostiashvili and R. Schilling. Langevin dynamics of a  $\varphi^4$ -model with long range interactions. *Z. Phys. B*, 102 :117–127, 1997.
- [121] M. A. Ruggero, N. C. Rich, A. Recio, S. S. Narayan, and L. Robles. Basilar-membrane responses to tones at the base of the chinchilla cochlea. *J. Acoust. Soc. Am.*, 101(4) :2151–2163, April 1997.
- [122] J. E. Santos and U. C. Täuber. Non-equilibrium behavior at a liquid-gas critical point. *Eur. Phys. J. B*, 28 :423–440, 2002.
- [123] J. A. Spudich. Motor molecules in action. *Nature (London)*, 348 :284, 1990.
- [124] J. A. Spudich. How molecular motors work. *Nature (London)*, 372 :515–518, December 1994.
- [125] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books Publishing, 2000.
- [126] K. Svoboda, C. F. Schmidt, B. J. Schnapp, and S. M. Block. Direct observation of kinesin stepping by optical trapping interferometry. *Nature (London)*, 365 :721–727, October 1993.
- [127] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A*, 15(1) :319–328, January 1977.
- [128] H. Takayasu and A. Y. Tretyakov. Extinction, survival, and dynamical phase transition of branching annihilating random walk. *Phys. Rev. Lett.*, 68(20) :3060–3063, May 1992.
- [129] U. C. Täuber. Critical dynamics : A field theory approach to equilibrium and non-equilibrium scaling behavior. Work in progress ; available on <http://www.phys.vt.edu/tauber/utauber.html>.
- [130] U. C. Täuber. Scale invariance and dynamic phase transitions in diffusion-limited reactions. arXiv :cond-mat/0304065 v 1, April 2003.
- [131] U. C. Täuber, V. K. Akkineni, and J. E. Santos. Effects of violating detailed balance on critical dynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 88(4) :045702(1)–045702(4), January 2002.
- [132] U. C. Täuber, M. J. Howard, and H. Hinrichsen. Multicritical behavior in coupled directed percolation processes. *Phys. Rev. Lett.*, 80(10) :2165–2168, March 1998.
- [133] U. C. Täuber and Z. Rácz. Critical behavior of  $O(n)$ -symmetric systems with reversible mode-coupling terms : Stability against detailed-balance violation. *Phys. Rev. E*, 55(4) :4120–4136, April 1997.
- [134] U. C. Täuber, J. E. Santos, and Z. Rácz. Non-equilibrium critical behavior of  $O(n)$ -symmetric systems. Effect of reversible mode-coupling terms and dynamical anisotropy. *Eur. Phys. J. B*, 7 :309–330, 1999.

- 
- [135] U. C. Täuber and F. Schwabl. Critical dynamics of the  $o(n)$ -symmetric relaxational models below the transition temperature. *Phys. Rev. B*, 46(6) :3337–3361, August 1992.
- [136] L. Van Hove. Correlations in space and time and Born approximation scattering in systems of interacting particles. *Phys. Rev.*, 95(1) :249–262, July 1954.
- [137] L. Van Hove. Time-dependant correlations between spins and neutron scattering in ferromagnetic crystals. *Phys. Rev.*, 95(6) :1374–1384, September 1954.
- [138] J. Villain. Theory of one- and two-dimensional magnets with an easy magnetization plane. II. The planar, classical, two-dimensional magnet. *J. Physique*, 36 :581, 1975.
- [139] D. J. Wallace and R. K. P. Zia. The renormalisation group approach to scaling in physics. *Rep. Prog. Phys.*, 41 :1–85, 1978.
- [140] K. Wiesenfeld. Noisy precursors of nonlinear instabilities. *J. Stat. Phys.*, 38(5/6) :1071–1097, 1985.
- [141] K. G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture. *Phys. Rev. B*, 4(9) :3174–3183, November 1971.
- [142] K. G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. II. Phase-space cell analysis of critical behavior. *Phys. Rev. B*, 4(9) :3184–3205, November 1971.
- [143] K. G. Wilson. Quantum field-theory models in less than 4 dimensions. *Phys. Rev. D*, 7(10) :2911–2926, May 1973.
- [144] K. G. Wilson. The renormalization group : Critical phenomena and the Kondo problem. *Rev. Mod. Phys.*, 47(4) :773–840, October 1975.
- [145] K. G. Wilson. The renormalization group and critical phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 55(3) :583–600, July 1983.
- [146] K. G. Wilson and M. E. Fisher. Critical exponents in 3.99 dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 28(4) :240–243, January 1972.
- [147] K. G. Wilson and J. Kogut. The renormalization group and the  $\epsilon$  expansion. *Phys. Rep.*, 12, 1974.
- [148] C. Zhou and J. Kurths. Noise-induced phase synchronisation and synchronisation transitions in chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 88(23) :230602(1)–230602(4), June 2002.
- [149] C. Zhou, J. Kurths, I. Z. Kiss, and J. L. Hudson. Noise-enhanced phase synchronisation of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 89(1) :014101(1)–014101(4), July 2002.
- [150] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, 1996.
- [151] G. Zweig. Basilar membrane motion. *Cold Spring Harb Symp Quant Biol*, 40 :619–633, 1976.





# Comportement critique d'oscillateurs couplés

## *Groupe de renormalisation et classe d'universalité*

Les étonnantes performances de l'organe auditif des mammifères sont notamment dues aux propriétés génériques des oscillateurs critiques couplés qui constituent le système. Cette thèse présente une étude des propriétés critiques génériques des systèmes spatialement étendus d'oscillateurs stochastiques couplés, opérant dans le voisinage d'une instabilité oscillante homogène ou bifurcation de Hopf. Dans ce contexte, cette bifurcation constitue un point critique dynamique hors équilibre, exhibant des propriétés universelles qui sont canoniquement décrites par l'équation Ginzburg-Landau complexe en présence de bruit. La formulation du problème en termes d'une théorie statistique dynamique des champs non hamiltonienne nous permet d'étudier le comportement critique du système à l'aide des techniques de la renormalisation dynamique perturbative.

Dans un cas particulier, une analogie exacte avec le modèle  $O(2)$  dynamique nous permet d'écrire une relation généralisée de la relation fluctuation-dissipation et de déduire le comportement critique du système directement à partir des études antérieures. Dans le cas général, nous établissons la structure du groupe de renormalisation de la théorie dans un espace de dimension  $4 - \varepsilon$ , en lui adaptant les schémas de renormalisation de Wilson et de Callan-Symanzik. La présence d'une fréquence caractéristique dans le système - la fréquence des oscillations spontanées à la transition - impose d'associer aux transformations de renormalisation un changement de référentiel oscillant dépendant de l'échelle. Nous effectuons le calcul à l'ordre de deux boucles en théorie des perturbations, et montrons que la classe d'universalité du modèle est décrite par le point fixe du modèle dynamique dissipatif  $O(2)$  dans un référentiel oscillant bien choisi. Ainsi, bien que la dynamique soit hautement hors équilibre et brise les relations de bilan détaillé, une relation fluctuation-dissipation généralisée est asymptotiquement restaurée à la transition. Cette relation prévoit l'existence de fortes contraintes sur les principales observables expérimentales : la fonction de corrélation à deux points et la fonction de réponse linéaire à un stimulus sinusoïdal.

**Mots-clés** : Physique statistique hors équilibre, point critique hors équilibre, groupe de renormalisation dynamique, équation Ginzburg-Landau complexe, bifurcation de Hopf, oscillateurs couplés, dynamique critique, biophysique, systèmes actifs, diagrammes de Feynman.

## Critical behavior of coupled oscillators

### *Renormalization group and universality class*

The astonishing efficiency of the auditory organ of mammals is particularly due to the generic properties of the coupled critical oscillators which make up the system. This thesis presents a study of the generic critical properties of spatially extended systems of coupled stochastic oscillators, operating in the proximity of a uniform oscillatory instability or Hopf bifurcation. In this context, this bifurcation constitutes an out of equilibrium critical point with universal features, which are canonically described by the complex Ginzburg-Landau equation in the presence of noise. The formulation of the problem in terms of a non Hamiltonian dynamical statistical field theory allows us to study the critical behavior of the system by using perturbative renormalization group techniques.

In a particular case, an exact analogy with the  $O(2)$  dynamical model allows us to write a generalized fluctuation-dissipation relation and to deduce the critical behavior directly from previous studies. In the general case, we establish the structure of the renormalization group of the theory in a  $4 - \varepsilon$  dimensional space, using adapted Wilson and Callan-Symanzik's schemes. The presence of a characteristic frequency in the system - the frequency of the spontaneous oscillations at the transition - impose to perform a scale dependant framework transformation during the renormalization process. We perform two-loop order calculations in perturbation theory, and show that the universality class of the model is described, in a suited oscillating framework, by the fixed point of the dissipative  $O(2)$  dynamics. Then, while the dynamics is highly out of equilibrium and breaks the detailed balance relations, a generalized fluctuation-dissipation relation is asymptotically recovered at the transition. This relation imposes strong constraints on the main experimental observables : the two point correlation function and the linear response function to an external sinusoidal stimulus.

**Key-words** : Out of equilibrium statistical physics, out of equilibrium critical point, dynamic renormalization group, complex Ginzburg-Landau equation, Hopf bifurcation, coupled oscillators, critical dynamics, biophysics, active systems, Feynman diagrams.